

TEORIA DE MORSE E APLICAÇÕES

RELATÓRIO CIENTÍFICO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA PROCESSO FAPESP 2020/04871-0

PIETRO MESQUITA PICCIONE

RESUMO. Este é o relatório científico final do meu programa de Iniciação científica, realizado no período de 1 Maio de 2020 a 30 Abril de 2021, sob a orientação do Prof. Ivan Struchiner (IME-USP), e com bolsa IC da Fapesp, Processo 2020/04871-0

SUMÁRIO

Introdução	3
1. Topologia Diferencial	3
1.1. Teoria de Morse elementar	3
1.2. Fibrados Vetoriais	16
1.3. Geometria Riemanniana	20
1.4. Topologia do Espaço de Caminhos	30
2. H-Cobordismo	46
2.1. Cobordismos: noções básicas	49
2.2. Prova da Conjetura de Poincaré em dimensão alta	50
2.3. Descrevendo o passo a passo da prova do teorema de H-cobordismo	52
2.4. Funções de Morse auto-indexadas	58
2.5. Campos de Vetores Morse-Smale	61
2.6. O primeiro teorema de cancelamento	63
2.7. Segundo Teorema de Cancelamento	67
2.8. Homologia de Morse	68
2.9. Cancelando pontos críticos de índices do medios	71
2.10. Cancelando pontos críticos de índices baixos	72

Data. Maio de 2021.

2.11. Conclusão da prova do teorema do H-Cobordismo	73
Referências	77

INTRODUÇÃO

A Teoria de Morse é uma sub-área da Topologia Diferencial que estuda a relação entre a topologia de uma variedade diferenciável e a estrutura dos pontos críticos de funções reais definidas nela.

Assim, na primeira parte deste projeto, entre Maio e Julho de 2020, me concentrei em estudar aspectos elementares das variedades diferenciáveis e da Teoria de Morse elementar (em uma variedade), o que se resumiu a estudar o tipo de homotopia de uma variedade em termos dos pontos críticos (não degenerados) de funções reais definidas nessa variedade.

Entre Agosto e Outubro estudei fundamentos de Geometria Riemanniana: estudei o conceito de métrica riemanniana, uma conexão em um fibrado vetorial e em uma variedade diferenciável, a conexão de Levi-Civita em uma variedade riemanniana, o tensor de curvatura (e as várias curvaturas subjacentes); além disso, me dediquei ao estudo de geodésicas e das suas propriedades minimizantes, até chegar no teorema de Hopf-Rinow.

Já entre Novembro e Dezembro juntei o conhecimento adquirido anteriormente, e com os conceitos de Geometria Riemanniana foi possível aplicar a Teoria de Morse para o estudo da topologia do espaço de caminhos entre dois pontos fixados de uma variedade (riemanniana). Assim, estudamos resultados que ligam a topologia de uma variedade com as curvaturas dessa variedade, obtidos de uma maneira bastante natural das teorias anteriores.

Nos primeiros dois meses de 2021, estudei fundamentos da topologia diferencial, como a teoria de transversalidade e a teoria de intersecção.

Em Março deste ano me dediquei ao estudo da homologia de Morse, e do relacionamento da Topologia Diferencial com os sistemas dinâmicos.

E por fim, em Abril concluí o estudo do teorema do H-Cobordismo e me dediquei a escrever o relatório.

Utilizei como textos bases os livros nas referências [10, 9, 4, 3, 12, 8], listados aqui em ordem decrescente de uso.

1. TOPOLOGIA DIFERENCIAL

1.1. Teoria de Morse elementar.

1.1.1. *Caso motivacional.* O exemplo que ilustra bem a Teoria de Morse é tentar estudar a decomposição celular de um toro a partir da função altura definida pela figura (1). As figuras (2)—(5) descrevem os subníveis da função altura no toro.

O subnível $h^{-1}\left[0, \frac{1}{4}\right]$ é homeomorfo a uma célula de dimensão 2, e é homotópico a uma célula de dimensão 0. O subnível $h^{-1}\left[0, \frac{1}{2}\right]$ é homeomorfo a um cilindro (veja Figura 3), e homotópico a uma célula de dimensão 2 com uma célula de dimensão 1 colada (veja figuras (10)—(13)). O subnível $h^{-1}\left[0, \frac{3}{4}\right]$ é homeomorfo a um cilindro com um disco removido (Figura 4), e homotópico a um cilindro, com uma célula de dimensão 1 colada (veja figuras (14)—(17)). Finalmente, o subnível $h^{-1}[0, 1]$ é homeomorfo ao toro inteiro, obtido colando uma célula de dimensão 2 ao subnível $h^{-1}\left[0, \frac{3}{4}\right]$ (Figura 5).

A função altura define portanto uma estrutura de complexo celular para o toro, com uma célula de dimensão 0, duas células de dimensão 1, e uma célula de dimensão 2. A dimensão dessas células corresponde ao índice da segunda derivada da função em seus pontos críticos.

A Teoria de Morse estuda como uma função diferenciável determina uma estrutura celular do domínio da função.

1.1.2. *Funções Reais de uma variedade.*

Definição 1.1. Uma *variedade riemanniana* é uma variedade diferenciável M , com uma função definida na variedade, g , tal que se $p \in M$ então $g_p: T_pM \times T_pM \rightarrow \mathbb{R}$ é um produto interno em T_pM com a seguinte condição de regularidade: se $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, a função $p \mapsto g_p(X_p, Y_p)$ é diferenciável.

Vamos estudar funções reais de uma variedade riemanniana. Neste texto a palavra *diferenciável* significará C^∞ , I denotará o intervalo $[0, 1]$, M uma variedade riemanniana e g sua métrica.

Vamos agora definir

Definição 1.2. Seja $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ então dizemos que $p \in M$ é *ponto crítico* de f se a derivada de f em p for 0. Dizemos ainda que $f(p)$ é *valor crítico* de f .

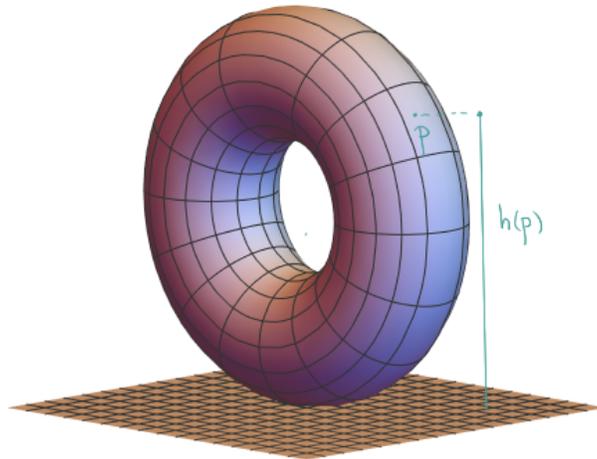
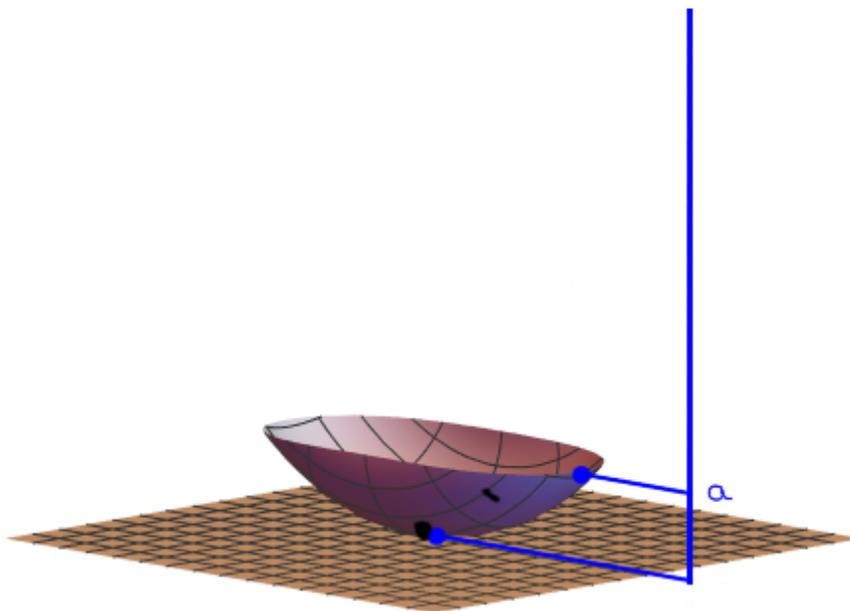


FIGURA 1. Função altura

FIGURA 2. Subnível $h^{-1}[0, \frac{1}{4}]$

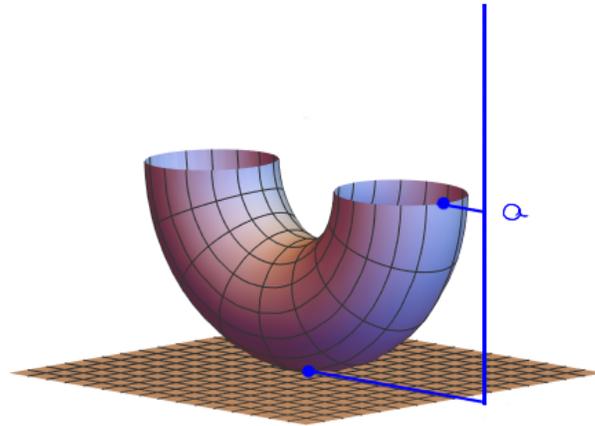


FIGURA 3. Subnível $h^{-1}\left[0, \frac{1}{2}\right]$

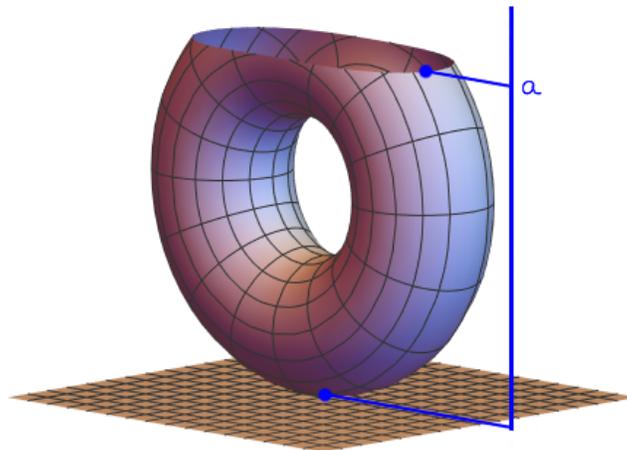
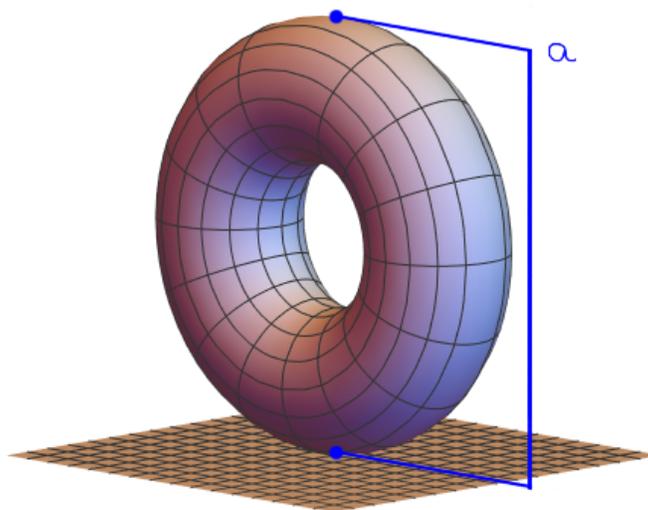


FIGURA 4. Subnível $h^{-1}\left[0, \frac{3}{4}\right]$

Lema 1.3. *Seja $f: M \rightarrow \mathbb{R}$, $p \in M$ ponto crítico de f e $v, w \in T_p M$, então se estendermos w a um campo de vetores, \tilde{w} , em alguma vizinhança*

FIGURA 5. Subnível $h^{-1}[0, 1]$

de p , temos que $v(\tilde{w}(f))$ não depende da extensão de w e é simétrico em v e w .

Demonstração. Se U é um aberto coordenado que contém p e onde \tilde{w} está definida, e $(u_1, \dots, u_n): U \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma carta, então escrevendo $v(\tilde{w}(f))$ em coordenadas temos que:

$$\begin{aligned} v(\tilde{w}(f)) &= \left(\sum_i v_i \frac{\partial}{\partial u_i} \Big|_p \right) (\tilde{w}(f)) = \left(\sum_i v_i \frac{\partial}{\partial u_i} \Big|_p \right) \left(\sum_j \tilde{w}_j \frac{\partial f}{\partial u_i} \right) = \\ &= \sum_{i,j} v_i \left(\frac{\partial \tilde{w}_j}{\partial u_i}(p) \frac{\partial f}{\partial u_j}(p) + \tilde{w}_j(p) \frac{\partial^2 f}{\partial u_j \partial u_i}(p) \right) = \sum_{i,j} v_i \left(0 + w_j \frac{\partial^2 f}{\partial u_j \partial u_i}(p) \right) = \\ &= \sum_{i,j} v_i w_j \frac{\partial^2 f}{\partial u_j \partial u_i}(p) \end{aligned}$$

Que é simétrico em v e w e evidentemente não depende da extensão.

□

A partir disso, em um ponto crítico de f , podemos definir uma segunda derivada de f .

Definição 1.4. Seja $f: M \rightarrow \mathbb{R}$, $p \in M$ ponto crítico de f , então dizemos que a seguinte aplicação bilinear é a *hessiana* de f em p :

$$f_{**p}: T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(v, w) \mapsto v(\tilde{w}(f))$$

onde \tilde{w} é uma extensão qualquer de w a um campo de vetores em alguma vizinhança de p .

Observação 1.5. A partir do Lema anterior, podemos concluir que em coordenadas locais a matriz associada a f_{**p} é dada por $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right)_{i,j}$

Definição 1.6. Seja $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ e $p \in M$ ponto crítico, dizemos que a nulidade de f em p é a dimensão do $\ker f_{**} \doteq \{v : f_{**}(v, *) = 0\}$. E que o índice de f em p é a máxima dimensão de um subespaço de $T_p M$ onde f_{**} é negativa definida.

Definição 1.7. Seja $f: M \rightarrow \mathbb{R}$, $p \in M$ ponto crítico, dizemos que p é *não-degenerado* se a nulidade de f em p for zero.

Notação. Se $f \in M \rightarrow \mathbb{R}$ é fixada então denotamos por M^a o subnível fechado:

$$M^a \doteq \{p \in M : f(p) \leq a\}.$$

Enunciamo o seguinte resultado elementar sem demonstração.

Lema 1.8. *Sejam V vizinhança aberta de 0 e $f: V \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciável com $f(0) = 0$, então $\exists g_i: V \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \sum_i x_i g_i(x)$, com $g_i(0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(0)$. \square*

Estamos prontos para demonstrar um resultado essencial da teoria, que nos permitirá dar uma descrição dos subníveis de uma função perto de um valor crítico.

Lema 1.9 (Lema de Morse). *Seja $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciável que tem em $p \in M$ um ponto crítico não-degenerado, então $\exists U \ni p$ aberto e $\chi: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ carta de M tal que $f \circ \chi^{-1} = f(p) + \sum_i \theta_i x_i^2$, onde $\theta_i \in \{-1, 1\}$.*

Esboço da prova 1. Podemos assumir que $f(p) = 0$ (caso contrário basta tomar $F = f - f(p)$). Aplicando o Lema 1.8 a f e suas derivadas parciais, obtemos que a f pode ser escrita em coordenadas locais como

$$\tilde{f}(x) = \sum_{i,j} x_i x_j h_{i,j}(x).$$

Definindo $\bar{h}_{i,j}(x) = \frac{1}{2}(h_{i,j}(x) + h_{j,i}(x))$, temos que $\bar{h}_{i,j}$ é simétrico em i, j e $\tilde{f} = \sum_{i,j} x_i x_j \bar{h}_{i,j}$, deste modo derivando duas vezes em zero, obtemos que $\bar{h}_{i,j}(0) = \frac{1}{2}(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j})$.

A demonstração do Lema é obtida agora com um processo parecido ao processo de diagonalização de formas quadráticas, observando que nesse caso é necessário diagonalizar simultaneamente todas as $\bar{h}_{i,j}(x)$. Para isto, se utiliza de forma oportuna o teorema da função inversa. Omitimos os detalhes desta parte final da prova, que pode ser encontrada em [10] \square

Demonstração alternativa. A idéia da demonstração é usar o truque de Moser.

Escrevendo f em coordenadas locais em torno de p podemos assumir, sem perda de generalidade, que f está definida em $U_0 \subset \mathbb{R}^n$ vizinhança de 0, e que $f(0) = 0$ (lembre que como p é ponto crítico $f_*(0) = 0$). Aplicando o Lema 1.8 a f e suas derivadas parciais, obtemos que a f pode ser escrita em coordenadas locais como

$$f(x) = \sum_{i,j} x_i x_j h_{i,j}(x).$$

Definindo $\bar{h}_{i,j}(x) = \frac{1}{2}(h_{i,j}(x) + h_{j,i}(x))$, temos que $\bar{h}_{i,j}$ é simétrico em i, j e $f = \sum_{i,j} x_i x_j \bar{h}_{i,j}$, deste modo derivando duas vezes em zero, obtemos que $\bar{h}_{i,j}(0) = \frac{1}{2}(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j})$. Assim exatamente como o processo de

diagonalização de formas quadráticas podemos supor que o sistema de coordenadas no ponto p escolhido é tal que $\frac{1}{2}(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j})(0)$ é da forma:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & & & 1 \end{pmatrix}$$

onde λ é o índice de $\frac{1}{2}(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j})(0)$.

Defina $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ como a forma quadrática $-x_1^2 - \dots - x_\lambda^2 + x_{\lambda+1}^2 + \dots + x_n^2$, queremos mostrar que existe um difeomorfismo φ tal que $f \circ \varphi = A$. Para fazer isso vamos construir uma família de funções

$$(1) \quad F(t, x) = f_t(x) \doteq A(x) + t(f(x) - A(x))$$

e de difeomorfismos locais, $\Phi(t, x) = \varphi_t(x)$, de maneira que

$$(2) \quad F(t, \varphi_t) = f_t \circ \varphi_t = A$$

e assim pondo $t = 1$ temos o resultado desejado. A vantagem dessa construção é que a família de difeomorfismos $(\varphi_t)_t$ será obtida como o fluxo de um campo vetorial (dependente do tempo), e será determinada como solução de uma equação diferencial.

Com efeito derivando em t a equação (2), temos:

$$(3) \quad \frac{\partial F}{\partial t}(t, \varphi_t) + \frac{\partial F}{\partial x}(t, \varphi_t) \frac{\partial \Phi}{\partial t}(t, x) = 0$$

Vamos definir X_t como um campo de vetores dependente de tempo que satisfaz:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t}(t, x) = (X_t)_{\varphi_t(x)}$$

Como $\frac{\partial F}{\partial t}(t, \varphi_t) = f - A$ temos que a equação anterior se transforma em:

$$\begin{aligned} f - A + df_t(x)(X_t)_{\varphi_t(x)} &= 0 \iff \\ df_t(x)(X_t)_{\varphi_t(x)} &= A - f \end{aligned}$$

Portanto podemos tentar resolver a equação diferencial

$$(4) \quad df_t(x)(X_t)_{\varphi_t(x)} = g \doteq A - f$$

Para fazer isso vamos simplificar a equação. Como $g(0) = A(0) + f(0) = 0 + 0 = 0$ e $g_*(0)v = A_*(0)v + f_*(0)v = 0 + 0 = 0$, então exatamente como para f , temos que $g(x) = \sum_{i,j} x_i x_j G_{i,j}(x)$, onde $G(x) = (G_{i,j}(x))_{i,j}$ é simétrica e depende diferenciavelmente de x .

Vamos então tratar de $df_t(x)(X_t)_{\varphi_t(x)}$. Como $df_t(0)v = 0$ para todo v , então em particular temos que $df_t(0)(X_t)_{\varphi_t(x)} = 0$ e assim:

$$(5) \quad \begin{aligned} df_t(x)(X_t)_{\varphi_t(x)} &= df_t(x)(X_t)_{\varphi_t(x)} - df_t(0)(X_t)_{\varphi_t(x)} \\ &= \int_0^1 \frac{d}{ds} df_t(sx)(X_t)_{\varphi_t(x)} ds = \\ &= \int_0^1 \frac{d}{ds} \left(\sum_i (X_t)_{\varphi_t(x)}^i \frac{\partial f_t}{\partial x_i}(sx) \right) ds = \\ &= \int_0^1 \left(\sum_{i,j} (X_t)_{\varphi_t(x)}^i \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial f_t}{\partial x_i}(sx) \frac{d}{ds} sx_j \right) ds = \\ &= \int_0^1 \sum_{i,j} x_j (X_t)_{\varphi_t(x)}^i \frac{\partial^2 f_t}{\partial x_j \partial x_i}(sx) ds = \\ &= \sum_{i,j} x_j (X_t)_{\varphi_t(x)}^i \int_0^1 \frac{\partial^2 f_t}{\partial x_j \partial x_i}(sx) ds \end{aligned}$$

Desta forma definindo $B_{i,j}(x, t) = \int_0^1 \frac{\partial^2 f_t}{\partial x_j \partial x_i}(sx) ds$, e $B(x, t) = (B_{i,j}(x, t))_{i,j}$, temos que $B(0, t) = \left(\frac{\partial^2 f_t}{\partial x_j \partial x_i}(0) \right)_{i,j}$ é igual a

$$\left(\frac{\partial^2 A}{\partial x_j \partial x_i}(0) + t \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(0) - \frac{\partial^2 f_t}{\partial x_j \partial x_i}(0) \right) \right)_{i,j}$$

Então como $\left(\frac{\partial^2 A}{\partial x_j \partial x_i}(0) \right)_{i,j}$ e $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(0) \right)_{i,j}$ são diagonais, então também $B(0, t)$ o é e a $j - j$ entrada de $B(0, t)$ é:

$$\begin{cases} -2 + t(-1 + 2) = -(2 - t), & \text{se } j \leq \lambda \\ 2 + t(1 - 2) = 2 - t, & \text{se } j > \lambda \end{cases}$$

E assim para $0 \leq t \leq 1$ $B(0, t)$ é não singular. Por continuidade, $B(x, t)$ é não singular para todo $t \in [0, 1]$ e todo x numa vizinhança de 0. Usando a

(5), vemos que a (4) é dada por:

$$\langle B(x, t)X_t, x \rangle = \langle G(x)x, x \rangle.$$

Uma solução X_t para a equação acima é dada por $X_t = B(x, t)^{-1}(G(x)x)$, que claramente depende suavemente de t e x . Como visto acima, uma solução $(\varphi_t)_t$ do problema (2) é obtida como fluxo¹ do campo vetorial (dependente do tempo) X_t . \square

Corolário 1.10. *Pontos críticos não degenerados são isolados.* \square

Uma função $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ é dita *de Morse* se todo seu ponto crítico é não degenerado.

Definição 1.11. Uma função $\varphi: \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ é um *grupo de difeomorfismo a 1 parametro* se:

- (1) $\forall t \varphi_t(*): M \rightarrow M$ é difeomorfismo
- (2) $\varphi_{t+s}(q) = \varphi_t(\varphi_s(q))$ para todo $t, s \in \mathbb{R}$ e $q \in M$

A um grupo a 1-parametro podemos associar um campo vetorial, X , tal que $T_q M \ni X_q$ é definido de maneira que se $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ então

$$X_q(f) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\varphi_h(q)) - f(q)}{h}$$

Definição 1.12. Dizemos que o campo de vetores X *gera* φ

Lema 1.13. *Seja X um campo vetorial em M com suporte compacto, então X gera um único grupo a 1-parametro de difeomorfismos.*

Demonstração. Obtida usando resultados de existência, unicidade e dependência contínua para soluções de EDOs. Omitimos os detalhes. \square

Estamos prontos para as demonstrações dos resultados necessários para descrever a decomposição celular de uma variedade associada a uma função de Morse definida nela.

Teorema 1.14. *Seja $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciável, com $f^{-1}[a, b]$ compacto sem pontos críticos. Então M^a é difeomorfo à M^b e é um retrato por*

¹Pode ser demonstrado que o fluxo de X_t está definido para todos os tempos $t \in [0, 1]$, veja [11]

deformação de M^b , onde $i: M^a \rightarrow M^b$ é uma equivalência de homotopia.

Demonstração. Defina ∇f como o gradiente de f em relação à métrica g , e denote por X um campo diferenciável com suporte compact, e que em $f^{-1}[a, b]$ coincida com $\frac{\nabla f}{\|\nabla f\|^2}$. Pelo lema 1.13 X gera um grupo de difeomorfismos $\varphi_t: M \rightarrow M$. Se $q \in M$ e $h_q: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é tal que $h_q(t) = f(\varphi_t(q))$, então se $\varphi_t(q) \in f^{-1}[a, b]$ temos que $h'_q(t) = X_q(f) = g(\nabla f, X)_q = 1$, portanto contanto que $\varphi_t(q) \in f^{-1}[a, b]$ temos que h_q é uma função afim com derivada 1. Deste modo temos que φ_{b-a} leva M^a difeomorficamente em M^b , de fato, se $q \in M^a$, então $h_q(b-a) - h_q(0) = b-a \implies f(\varphi_{b-a}(q)) \leq a+b-a = b \implies \varphi_{b-a}(q) \in M^b$, e analogamente podemos provar que se $q \in M^b$ então $q' \doteq \varphi_{a-b}(q) \in M^a$ e $\varphi_{b-a}(q') = q$.

E a função

$$r_t: M^b \rightarrow M^b$$

$$q \mapsto \begin{cases} q, & \text{se } q \in M^a \\ \varphi_{t(a-f(q))}(q), & \text{se } q \in f^{-1}[a, b] \end{cases}$$

É tal que $r_0 = \mathcal{I}$ e r_1 é uma retração de M^b em M^a e portanto como a família de funções depende continuamente em t , temos que M^a é um retrato por deformação de M^b \square

Teorema 1.15. *Seja p um ponto crítico não degenerado de índice λ para $f: M \rightarrow \mathbb{R}$. Se $c \doteq f(p)$ então supondo que $\exists \varepsilon > 0$ tal que $f^{-1}[c-\varepsilon, c+\varepsilon]$ é compacto sem outros pontos críticos, além de p , então diminuindo ε , se necessário, $M^{c+\varepsilon}$ tem o tipo de homotopia de $M^{c-\varepsilon} \cup e_\lambda$, onde e_λ é uma λ -célula, e $M \cup e_\lambda$ denota a colagem celular usual na Topologia Algébrica.*

Esboço da Demonstração. Escolha um sistema de coordenadas, $u: V(p) \rightarrow U(0)$, em torno de p , de maneira que $f = c - u_1^2 - \dots - u_\lambda^2 + u_{\lambda+1}^2 + \dots + u_n^2$.

Tome $\varepsilon > 0$ de maneira que $f^{-1}[c-\varepsilon, c+\varepsilon]$ seja compacto, livre de pontos críticos e que $V(p) \supset \overline{B}_{2\varepsilon}(0)$. Defina

$$e_\lambda \doteq \{x \in M : \sum_1^\lambda u_i^2 \leq \varepsilon \text{ e } u_k = 0 \forall k > \lambda\},$$

observe então que $e_\lambda \cap M^{c-\varepsilon} = \partial e_\lambda$.

Provaremos que $M^{c-\varepsilon} \cup e_\lambda$ é um retrato por deformação de $M^{c+\varepsilon}$.

Seja $\mu: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciável, satisfazendo

- $\mu(0) > \varepsilon$
- $\mu(t) = 0$ para $t \geq 2\varepsilon$
- $-1 < \mu'(t) \leq 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$

Defina

$F: M \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \begin{cases} f(x), & \text{se } x \notin V(p) \\ f(x) - \mu(\sum_1^\lambda u_i(x)^2 + 2 \sum_{\lambda+1}^n u_j(x)^2), & \text{se } x \in V(p) \end{cases}$$

Ao longo desta demonstração vamos provar os seguintes fatos sobre F :

- $F \leq f$
- $F^{-1}(-\infty, c + \varepsilon] = M^{c+\varepsilon}$
- Todo ponto crítico de F é ponto crítico de f
- $F^{-1}[c - \varepsilon, c + \varepsilon] \subset f^{-1}[c - \varepsilon, c + \varepsilon]$

Para o primeiro ponto basta observar que μ é não negativa, e assim $F \leq f$.

Vamos agora separar as demonstrações em partes.

Afirmção 1. $F^{-1}(-\infty, c + \varepsilon] = M^{c+\varepsilon}$

Demonstração. O que acabamos de observar implica que $F^{-1}(-\infty, c + \varepsilon] \supset M^{c+\varepsilon}$. Por outro lado se $x \in F^{-1}(-\infty, c + \varepsilon]$ temos que, ou $x \notin V(p)$, ou $x \in V(p)$. Se $x \notin V(p)$ temos que $f(x) = F(x) \leq c + \varepsilon$, caso contrário se $\mu(\sum_1^\lambda u_i^2 + 2 \sum_{\lambda+1}^n u_j^2) < 0$ então $\sum_1^\lambda u_i^2 + 2 \sum_{\lambda+1}^n u_j^2 \leq 2\varepsilon$ e portanto

$$f = c - \sum_1^\lambda u_i^2 + \sum_{\lambda+1}^n u_j^2 \leq c + \sum_{\lambda+1}^n u_j^2 \leq c + \frac{1}{2} \sum_1^\lambda u_i^2 + \sum_{\lambda+1}^n u_j^2 \leq c + \varepsilon$$

□

Afirmção 2. Os pontos críticos de f são os mesmos dos de F .

Demonstração. Basta verificar que os pontos críticos de F e f são os mesmos em $V(p)$. O único ponto crítico de f em $V(p)$ é p , e como $F = h(\xi, \eta)$,

com

$$h(x, y) \doteq c - x + y - \mu(x + 2y),$$

$$\xi(q) \doteq \sum_1^\lambda u_i(q)^2,$$

$$\eta(q) \doteq \sum_{\lambda+1}^n u_j(q)^2$$

temos que $dF = \frac{\partial h}{\partial x} d\xi + \frac{\partial h}{\partial y} d\eta$, desta forma observando que

$$\frac{\partial h}{\partial x} = -1 - \mu' < 0$$

$$\frac{\partial h}{\partial y} = 1 - 2\mu' \geq 1$$

e que $\{d\xi(q), d\eta(q)\}$ é l.i. para todo $q \neq p$, temos que p é o único ponto crítico de F em $V(p)$. \square

Afirmção 3. $F^{-1}[c - \varepsilon, c + \varepsilon] \subset f^{-1}[c - \varepsilon, c + \varepsilon]$

Demonstração. Como $F \leq f$ temos que $f^{-1}(-\infty, c + \varepsilon] \supset F^{-1}(-\infty, c + \varepsilon]$. Assim pelo primeiro ponto temos que:

$$\begin{aligned} f^{-1}[c - \varepsilon, c + \varepsilon] &= \\ &= f^{-1}(-\infty, c + \varepsilon] \setminus f^{-1}(-\infty, c - \varepsilon) \supset \\ &\supset F^{-1}(-\infty, c + \varepsilon] \setminus F^{-1}(-\infty, c - \varepsilon) = \\ &= F^{-1}[c - \varepsilon, c + \varepsilon] \end{aligned}$$

\square

A afirmação acima implica que $F^{-1}[c - \varepsilon, c + \varepsilon]$ é compacto. E portanto como $F(p) = f(p) - \mu(0) < c - \varepsilon$ pelo lema anterior concluímos que o conjunto $F^{-1}(-\infty, c - \varepsilon]$ é um retrato por deformação de $F^{-1}(-\infty, c - \varepsilon] = M^{c+\varepsilon}$. Desta forma se definirmos o conjunto $H \doteq \overline{F^{-1}(-\infty, c - \varepsilon)} \setminus M^{c-\varepsilon}$, nos resta mostrar que $M^{c-\varepsilon} \cup e_\lambda$ é um retrato por deformação de $M^{c-\varepsilon} \cup H$. Para fazer isso se costroe um retrato explicito, veja referência [10]. \square

Finalmente, vamos ao teorema mais importante desta primeira parte que nos da a decomposição celular de nossa variedade.

Teorema 1.16. *Se $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ não tem pontos críticos degenerados, e se $\forall a \in \mathbb{R}$ M^a é compacto, então M tem o tipo de homotopia de um complexo-C.W., com uma célula de dimensão λ para cada ponto crítico com índice λ .*

Demonstração. Sejam $c_1 < c_2 < \dots$ os valores críticos de f , então como $\forall a \in \mathbb{R}$ M^a é compacto temos que $\{c_i : i\}$ não tem pontos de acumulação, caso contrário se d fosse um ponto de acumulação teríamos que o compacto M^{d+1} , contém infinitos pontos críticos que é um absurdo pois os pontos críticos não degenerados são isolados pelo Lema de Morse. Assim, como para $a < c_1$ $M^a = \emptyset$, se assumirmos que a não é um valor crítico, e M^a tenha o tipo de homotopia de um complexo-C.W., definindo $c \doteq \min\{c_i : c_i > a\}$ então vamos mostrar que M^c é um complexo C.W.

De fato pelos teoremas 1.14 e 1.15 temos que M^a tem o mesmo tipo de homotopia, cm $h: M^{c-\varepsilon} \rightarrow M^a$ uma equivalência, e $\exists \varepsilon$ tal que $M^{c-\varepsilon} \cup_{\varphi_1} e_{\lambda_1} \cup \dots \cup_{\varphi_{j(c)}} e_{\lambda_{j(c)}} \simeq M^{c+\varepsilon}$, onde $\varphi_i: \partial e_{\lambda_i} \rightarrow M^{c-\varepsilon}$. Assim se $h': M^a \rightarrow K$ for a equivalência de homotopia de M^a com K , um complexo-C.W., temos que $h' \circ h \circ \varphi_j: \partial e_{\lambda_j} \rightarrow K$ é homotopico, por aproximação celular a uma aplicação $\psi: \partial e_{\lambda_j} \rightarrow K_{\lambda_j-1}$, onde K_{λ_j-1} é o $(\lambda_j - 1)$ -esqueleto de K . Portanto podemos provar que $M^{c+\varepsilon} \simeq M^{c-\varepsilon} \cup_{\varphi_i} e_{\lambda_i} \simeq K \cup_{\psi_i} e_{\lambda_i}$ que é um complexo-C.W..

Concluimos agora que, nas hipóteses do Teorema, M possui a estrutura de um CW-complexo. O caso em que M é compacta segue da análise anterior, levando em consideração que, nesse caso, o número de pontos críticos é finito. O caso em que M é não compacta, mas que todos os pontos críticos de f estejam num subnível compacto da f , também é deduzido como o mesmo argumento.

Para o caso geral, precisa utilizar um argumento mais elaborado, que usa uma exaustão de M por compactos, e utiliza o Teorema de Whitehead que pode ser visto em [7]. \square

1.2. Fibrados Vetoriais.

Definição 1.17. Um *fibrado vetorial de posto k sobre uma variedade M^n* é uma tripla: (E, π, M) onde:

- E é uma variedade diferenciável;

- $\pi: E \rightarrow M$ é uma aplicação diferenciável sobrejetora;
- Para todo $x \in M$, a *fibra* $\pi^{-1}(x)$ possui uma estrutura de espaço vetorial (real) de dimensão k ;
- para todo $p \in M$, existe uma vizinhança aberta U de p e um difeomorfismo h tal que:

$$(6) \quad h: \pi^{-1}(U) \longrightarrow U \times \mathbb{R}^k$$

tal que para todo $x \in U$, $h(\pi^{-1}(x)) = \{x\} \times \mathbb{R}^k$ e

$$h|_{\pi^{-1}(x)}: \pi^{-1}(x) \longrightarrow \{x\} \times \mathbb{R}^k$$

é um isomorfismo de espaços vetoriais.

Chamaremos E de *espaço total*, M de *espaço base*, π de *projeção*, e o conjunto $E_x \doteq \pi^{-1}(x)$ é chamado de *fibra no ponto* x . Denotaremos por $E|_U$ o conjunto $\pi^{-1}(U)$.

As aplicações h em (6) são chamadas *trivializações locais* do fibrado (E, π, M) .

Exemplo 1.18. O *fibrado tangente* de M :

$$TM \doteq \{(p, v) : p \in M, v \in T_p M\}$$

é um fibrado vetorial.

Definição 1.19. Seja (E, π, M) um fibrado vetorial; dizemos que uma função $s: M \rightarrow E$ é uma *seção de* E se $s \circ \pi = \mathbb{I}$. Denotaremos o conjunto das seções de E por $\Gamma(E, M) = \Gamma(E)$

Exemplo 1.20. Uma seção do fibrado tangente pode ser identificada com um campo vetorial em M , isto é, se $s \in \Gamma(TM)$, então $s(p) = (p, v(p))$ e definindo $X_p = v(p)$ temos que $X \in \mathfrak{X}(M)$.

Proposição 1.21. Se (E, π, M) é um fibrado vetorial, então $\Gamma(E)$ possui uma estrutura de módulo sobre a \mathbb{R} -álgebra $\mathfrak{F}(M)$, com as operações:

- $s_1, s_2 \in \Gamma(E)$, $(s_1 + s_2)(x) \doteq s_1(x) + s_2(x) \in E_x$
- $f \in \mathfrak{F}(M)$, $s \in \Gamma(E)$, $(fs)(x) \doteq f(x)s(x)$

Com um pequeno abuso de terminologia, às vezes usaremos somente o símbolo E para denotar o fibrado vetorial (E, π, M) .

Definição 1.22. Dado um fibrado vetorial E , uma *conexão em E* é uma aplicação \mathbb{R} -bilinear:

$$\begin{aligned} \nabla: \mathfrak{X}(M) \times \Gamma(E) &\longrightarrow \Gamma(E) \\ (X, s) &\longmapsto \nabla_X s \end{aligned}$$

tal que $\forall s \in \Gamma(E)$ a aplicação $\nabla_* s$ é $\mathfrak{F}(M)$ -linear e $\forall X \in \mathfrak{X}(M), f \in \mathfrak{F}(M)$ e $s \in \Gamma(E)$ temos que $\nabla_X f s = f \nabla_X s + X(f)s$.

Em termos mais concretos, uma conexão num fibrado vetorial deve ser pensada como uma operação que permite calcular as derivadas de seções do fibrados, nas direções tangentes à base.

Observação 1.23. Usando os fato que $\nabla_* s$ é $\mathfrak{F}(M)$ -linear, e a identidade $\nabla_X f s = f \nabla_X s + X(f)s$ podemos concluir que ∇ é local no seguinte sentido: se $X' = X'', s' = s''$ em uma vizinhança de um ponto p , temos que $(\nabla_{X'} s')_p = (\nabla_{X''} s'')_p$. Mais do que isso temos que ∇ induz naturalmente uma conexão $\nabla': \mathfrak{X}(U) \times \Gamma(E|_U) \rightarrow \Gamma(E|_U)$, tal que $(\nabla_X s)|_U = \nabla'_{X|_U} s|_U$. Reciprocamente, usando as trivialização locais de um fibrado é fácil definir conexões *locais* de um fibrado vetorial (veja exemplo 1.28 abaixo), e usando partições da unidade é possível construir conexões em fibrados vetoriais arbitrários.

Definição 1.24. Seja (E, π, M) um fibrado vetorial de posto k , chamamos de um *referencial de E* uma família de k seções de E , s_1, \dots, s_k , tais que que para todo $x \in M$ temos que $s_1(x), s_2(x), \dots, s_k(x)$ é uma base de E_x . Em geral, fibrados vetoriais podem não admitir referenciais, e é conveniente definir também a noção de *referencial local E* , que é um referencial de $E|_U$ para algum U aberto.

Não é difícil ver que, dado um qualquer ponto $x \in M$, existe sempre um referencial local para E definido numa vizinhança aberta de x .

Introduzimos agora a importante noção de *pull-back* de fibrados.

Exemplo 1.25 (Fibrado Pullback). Sejam M, N variedades, $f: N \rightarrow M$ diferenciável e (E, π, M) um fibrado vetorial. Definimos

$$f^* E \doteq \{(x, v) \in N \times E : f(x) = \pi(v)\}$$

Desta forma, f^*E é um fibrado vetorial sobre N , com projeção $f^*(\pi)$ dada pela projeção na primeira coordenada. Note que f^*E é um espaço topológico, com a topologia de subespaço de $N \times E$. Utilizando trivializações locais do fibrado E , não é difícil descrever uma estrutura diferenciável para f^*E , na qual a projeção para na segunda coordenada seja diferenciável.

Observe que toda seção em E induz uma seção f^*E , com efeito se $s \in \Gamma(E)$ então definimos por f^*s a função $s \circ f$, que será uma seção de f^*E . Além disso, se ∇ é uma conexão de E , então f também induz uma conexão, $f^*\nabla$, em f^*E , a ver a conexão dada pela relação:

$$(7) \quad (f^*\nabla)_X f^*s = f^*(\nabla_{f_*X} s)$$

A relação acima define uma conexão da seguinte forma, se $p \in M$ e $U(p)$ for uma vizinhança trivializante de E em p então podemos encontrar um referencial local, $r(x) = (r^1(x), \dots, r^n(x))$, em $U(p)$. Desta maneira f^*r é um referencial local em $V(q) \doteq f^{-1}(U(p))$, e assim se $X \in \mathfrak{X}(N)$ e $s \in \Gamma(f^*E)$ podemos escrever em $V(q)$

$$s(x) = \sum_j \zeta^j(x) f^*r^j(x)$$

onde $(\zeta^j)_{j \in \{1, \dots, n\}}$ são funções suaves. Portanto se $f^*\nabla$ estiver bem definida temos que em $V(q)$

$$\begin{aligned} (f^*\nabla)_X s &= \\ &= (f^*\nabla)_X \sum_j \zeta^j f^*r^j = \sum_j X(\zeta^j) f^*r^j + \zeta^j (f^*\nabla)_X f^*r^j = \\ (8) \quad &= \sum_j X(\zeta^j) f^*r^j + \zeta^j f^*(\nabla_{f_*X} r^j) \end{aligned}$$

O que mostra que se $f^*\nabla$ estiver bem definido, é único, pois o termo a direita da última igualdade acima depende somente de ∇ e de f . Por fim podemos definir $f^*\nabla$ pela expressão (8), que nos dará uma conexão em f^*E satisfazendo (7).

Estaremos interessados num caso especial de pull-back que nos permite definir de forma mais precisa a noção de derivada covariante ao longo de

uma curva. Dada uma curva diferenciável $\omega:]a, b[\rightarrow M$, o pull-back ω^*TM é um fibrado vetorial sobre $]a, b[$.

Definição 1.26. Sejam $\omega:]a, b[\rightarrow M$ uma curva diferenciável e ∇ uma conexão no fibrado tangente de M . Diremos que uma seção V de ω^*TM é um *campo de vetores ao longo de ω* , denotaremos por $\mathfrak{X}(\omega)$ o conjunto $\Gamma(\omega^*TM)$, e por $\frac{DV}{dt}$ a seção $(\omega^*\nabla)_{\frac{d}{dt}}V$, diremos que $\frac{DV}{dt}$ é a *derivada covariante de V* induzida pela conexão ∇ .

Exemplo 1.27. O campo tangente $\frac{d\omega}{dt}$ é um campo de vetores ao longo da curva ω .

1.3. Geometria Riemanniana. Deste ponto em diante diremos que uma conexão na variedade M será uma conexão no fibrado $TM: \nabla: \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$. Uma conexão em M , então, será pensada como o instrumento que permite calcular as derivadas de campos vetoriais em M em direções tangentes a M .

Exemplo 1.28. Se $M = \mathbb{R}^n$, podemos definir $(\nabla_X Y)_p \doteq (dY)_p X_p$, uma conexão em \mathbb{R}^n

Observação 1.29. Já sabemos que ∇ é local, mas além disso $(\nabla_X Y)_p$ não depende dos campos X, Y em si, e somente das quantidades: X_p e Y “na direção” de X , isto é, se U for um aberto coordenado e (u_1, \dots, u_N) coordenadas locais em U , então chamando $\partial_i \doteq \frac{\partial}{\partial u_i}$ temos $\nabla_{\partial_i} \partial_j \in \mathfrak{X}(U)$ portanto podemos escrever $\nabla_{\partial_i} \partial_j \doteq \sum_k \Gamma_{i,j}^k \partial_k$, com $\Gamma_{i,j}^k: U \rightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável. Estabelecido isso se $X = \sum_i x_i \partial_i$ e $Y = \sum_j y_j \partial_j$, então:

$$\begin{aligned}
 \text{(A)} \quad \nabla_X Y &= \nabla_{\sum_i x_i \partial_i} Y = \sum_i x_i \nabla_{\partial_i} Y = \sum_i \sum_j x_i \nabla_{\partial_i} y_j \partial_j = \\
 &= \sum_{i,j} x_i y_j \nabla_{\partial_i} \partial_j + \partial_i(y_j) \partial_j = \sum_k \left[\left(\sum_{i,j} x_i y_j \Gamma_{i,j}^k \right) + \sum_i x_i \partial_i(y_k) \right] \partial_k = \\
 &= \sum_k \left[\left(\sum_{i,j} x_i y_j \Gamma_{i,j}^k \right) + X(y_k) \right] \partial_k
 \end{aligned}$$

Assim calculando em p temos que $(\nabla_X Y)_p$ como função de X e Y depende somente de $x_i(p), y_i(p), X_p(y_i)$ para todo i .

1.3.1. *Conexão de Levi-Civita.*

Definição 1.30. Dizemos que um campo ao longo de c , V é *paralelo* se $\frac{DV}{dt} = 0$

Lema 1.31. *Seja c uma curva diferenciável em M e $V_0 \in T_{c(0)}M$, então existe um único campo de vetores, V , ao longo de c tal que $V(0) = V_0$ e V paralelo.*

Demonstração. Basta observar que em coordenadas a equação $\frac{DV}{dt} = 0$ equivale a um sistema linear de n equações de primeira ordem, portanto dado V_0 existe um único campo paralelo, definido para todo tempo, que em zero é V_0 \square

Definição 1.32. Dizemos que $V(t)$ é o *transporte paralelo* de V_0 ao longo de c .

Definição 1.33. A conexão ∇ em M , é dita *compatível com a métrica* (ou *riemanniana*) se o transporte paralelo preserva a métrica, isto é, se $P, Q \in \mathfrak{X}(c)$ forem paralelos então $g_{c(t)}(P(t), Q(t)) = g_{c(0)}(P(0), Q(0))$ para todo t .

Proposição 1.34. ∇ é *compatível com a métrica g* se, e somente se para toda curva c em M e $V, W \in \mathfrak{X}(c)$

$$\frac{d}{dt}g(V(t), W(t)) = g\left(\frac{DV}{dt}, W\right) + g\left(V, \frac{DW}{dt}\right)$$

Demonstração. Seja $P_1(0), \dots, P_n(0)$ uma base ortonormal de $T_{c(0)}M$. E tome $P_1(t), \dots, P_n(t)$ o transporte paralelo desses vetores ao longo de $c(t)$. Como ∇ é compatível com a métrica temos que $P_1(t), \dots, P_n(t)$ é uma base ortonormal de $T_{c(t)}M$ para todo t .

Assim, podemos escrever $V(t) = \sum_i v_i(t)P_i(t)$ e $W(t) = \sum_j w_j(t)P_j(t)$, e portanto temos que

$$g(V(t), W(t)) = \sum_k v_k(t)w_k(t)$$

derivando em ambos os lados da equação temos que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}g(V(t), W(t)) &= \frac{d}{dt} \sum_k v_k(t)w_k(t) \\
&= \sum_k v'_k(t)w_k(t) + v_k(t)w'_k(t) \\
&= g\left(\sum_i v'_i(t)P_i(t), \sum_j w_j(t)P_j(t)\right) + \\
&+ g\left(\sum_i v_i(t)P_i(t), \sum_j w'_j(t)P_j(t)\right) \\
&= g\left(\frac{DV}{dt}, W\right) + g\left(V, \frac{DW}{dt}\right)
\end{aligned}$$

□

De maneira parecida podemos mostrar que

Corolário 1.35. *Se ∇ é compátivel com a métrica, e $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ então:*

$$X(g(Y, Z)) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$$

□

Para motivar a próxima definição de simetria na conexão, vou introduzir o conceito de *Hessiana* de uma função real definida em uma variedade. Observe que até agora só mencionamos o conceito da Hessiana de uma função nos seus pontos críticos, pois, de fato, em uma variedade diferenciável, sem outra estrutura, não podemos estender este conceito a pontos regulares. Quando, porém, temos também uma conexão na variedade, podemos dar a seguinte definição para a hessiana de $f: M \rightarrow \mathbb{R}$:

$$f_{**}(X, Y) = X(Y(f)) + \nabla_X Y(f)$$

Observe que com esta definição f_{**} é bilinear e em um ponto crítico coincide com (1.4).

Vamos calcular $f_{**}(X, Y) - f_{**}(Y, X)$:

$$\begin{aligned} f_{**}(X, Y) - f_{**}(Y, X) &= \\ &= X(Y(f)) + \nabla_X Y(f) - Y(X(f)) - \nabla_Y X(f) = \\ &= ([X, Y] - \nabla_Y X - \nabla_X Y)(f) \end{aligned}$$

O que nos leva a definir

Definição 1.36. Dizemos que uma conexão ∇ é *simétrica* se satisfaz:

$$\nabla_Y X - \nabla_X Y = [X, Y]$$

Como resultado imediato da definição, temos que em uma variedade com uma conexão simétrica a hessiana é um operador bilinear simétrico.

Além disso, a condição de simetria na conexão nos permite demonstrar o seguinte resultado.

Proposição 1.37. *Seja $f: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow M$ diferenciável, então se ∇ é uma conexão simétrica em M temos que:*

$$\frac{D}{du} \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{D}{dt} \frac{\partial f}{\partial u}$$

Demonstração. Seja $x \in U$ e Φ um sistema de coordenadas em uma vizinhança de $f(x)$. Podemos escrever f em coordenadas de maneira que $f(t, u) = (f^1(t, u), \dots, f^n(t, u))$, assim

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \sum_{k=1}^n f_t^k \partial_k$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \sum_{k=1}^n f_u^k \partial_k$$

portanto

$$\begin{aligned} \frac{D}{du} \frac{\partial f}{\partial t} &= \frac{D}{du} \left(\sum_{k=1}^n f_t^k \partial_k \right) = \sum_k f_{t,u}^k \partial_k + f_t^k \frac{D}{du} \partial_k = \\ &= \sum_k f_{t,u}^k \partial_k + f_t^k \nabla_{\frac{\partial f}{\partial u}} \partial_k = \sum_k f_{t,u}^k \partial_k + \sum_j f_t^k f_u^j \nabla_{\partial_j} \partial_k \end{aligned}$$

Onde a última expressão é simétrica em t e u , pois

$$\nabla_{\partial_j} \partial_k - \nabla_{\partial_k} \partial_j = [\partial_k, \partial_j] = 0$$

□

Teorema 1.38 (Levi-Civita). *Dada uma variedade riemanniana $\exists! \nabla$ conexão simétrica e compatível com a métrica.*

Demonstração. Se existisse uma tal conexão, sabemos que se $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ então

$$(9) \quad X(g(Y, Z)) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$$

fazendo permutações cíclicas obtemos:

$$(10) \quad Y(g(Z, X)) = g(\nabla_Y Z, X) + g(Z, \nabla_Y X)$$

$$(11) \quad Z(g(X, Y)) = g(\nabla_Z X, Y) + g(X, \nabla_Z Y)$$

Somando 1 e 2 e subtraindo 3 obtemos:

$$\begin{aligned} X(g(Y, Z)) + Y(g(Z, X)) - Z(g(X, Y)) &= \\ g([Z, X], Y) + g([Z, Y], X) + g(\nabla_Y X, Z) &= \\ -2g(\nabla_X Y, Z) + 2g(\nabla_X Y, Z) &= \\ g([Z, X], Y) + g([Z, Y], X) + g([X, Y], Z) + 2g(\nabla_X Y, Z) & \end{aligned}$$

Portanto escrevemos $g(\nabla_X Y, Z)$ em função somente da métrica e de X, Y, Z , assim concluímos a unicidade, pois $g(v, \cdot)$ determina unicamente v .

Por sua vez, se definirmos $\nabla_X Y$ como o único elemento que satisfaz:
 $\forall Z \in \mathfrak{X}(M)$

$$\begin{aligned} g(\nabla_X Y, Z) &= \frac{1}{2} \{ X(g(Y, Z)) + Y(g(Z, X)) - Z(g(X, Y)) \\ &\quad - g([Z, X], Y) - g([Z, Y], X) - g([X, Y], Z) \} \end{aligned}$$

Não é difícil provar que ∇ é uma conexão simétrica e compatível □

Chamamos uma tal conexão de *conexão de Levi-Civita*. De aqui em diante toda conexão será a de Levi-Civita

1.3.2. Tensor de Curvatura.

Definição 1.39. Dados $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ dizemos que

$$R(X, Y)Z \doteq -\nabla_X(\nabla_Y Z) + \nabla_Y(\nabla_X Z) + \nabla_{[X, Y]}Z$$

é o tensor de curvatura de M . Denotamos por $(X, Y, Z, T) = g(R(X, Y)Z, T)$

Lema 1.40. R é trilinear (vendo $\mathfrak{X}(M)$ como módulo sobre $\mathfrak{F}(M) = \{f: M \rightarrow \mathbb{R} \text{ diferenciável}\}$)

Demonstração. Se $Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ mostraremos que $R(*, Y)Z$ é linear, a linearidade das outras entradas é parecida. Sejam $f \in \mathfrak{F}(M)$ e $X, X' \in \mathfrak{X}(M)$, então:

$$\begin{aligned} (1) \quad & -\nabla_{fX}(\nabla_Y Z) = -f\nabla_X(\nabla_Y Z) \\ (2) \quad & -\nabla_Y(\nabla_{fX} Z) = Y(f)\nabla_X Z + f\nabla_Y(\nabla_X Z) \\ (3) \quad & \nabla_{[fX, Y]} Z = \nabla_{f[X, Y] - Y(f)X} Z = f\nabla_{[X, Y]} Z - Y(f)\nabla_X Z \end{aligned}$$

Logo $R(fX, Y)Z = (1)+(2)+(3) = fR(X, Y)Z$. A aditividade segue diretamente da aditividade de ∇ . \square

Observação 1.41. O lema acima nos diz que $(R(X, Y)Z)_p$ depende somente de X_p, Y_p, Z_p , diremos então que R é tensor, a demonstração deste fato é muito parecida com a de 1.29

Proposição 1.42. Valem as seguintes identidades:

$$\begin{aligned} (1) \quad & R(X, Y)Z + R(Y, X)Z = 0 \\ (2) \quad & R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0 \\ (3) \quad & (X, Y, Z, T) + (X, Y, T, Z) = 0 \\ (4) \quad & (X, Y, Z, T) = (Z, T, X, Y) \end{aligned}$$

Demonstração. 1) vem diretamente da definição.

2) Como R é tensor basta verificar que a igualdade vale para X, Y, Z sem torção, isto é, $[X, Y] = 0 = [Y, Z] = [Z, X]$, então basta verificar que :

$$\begin{aligned} & -\nabla_X(\nabla_Y Z) + \nabla_Y(\nabla_X Z) - \nabla_Y(\nabla_Z X) + \nabla_Y(\nabla_Z X) \\ & -\nabla_Z(\nabla_X Y) + \nabla_X(\nabla_Z Y) = 0 \end{aligned}$$

De fato,

$$= \nabla_X[Z, Y] + \nabla_Y[X, Z] + \nabla_Z[X, Y] = 0$$

As outras são similares. \square

Proposição 1.43. Se $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow M$ diferenciável, e $V \in \mathfrak{X}(f)$, então:

$$-\nabla_{\frac{\partial f}{\partial x}} \nabla_{\frac{\partial f}{\partial y}} V + \nabla_{\frac{\partial f}{\partial y}} \nabla_{\frac{\partial f}{\partial x}} V = R\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)V$$

1.3.3. *Demais curvaturas.*

Definição 1.44. Sejam $X, Y \in T_p M$ ortonormais, chamamos a quantidade $k_p(X, Y) \doteq (X, Y, X, Y)$ de *curvatura seccional de X, Y em p*

É possível mostrar que $k_p(X, Y)$ é a curvatura gaussiana da superfície $(u_1, u_2) \mapsto \exp_p(u_1 X + u_2 Y)$

Definição 1.45. O *tensor de Ricci* em p de uma variedade riemanniana é a aplicação bilinear:

$$K: T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(U_1, U_2) \mapsto \text{tr}(R(U_1, *)U_2)$$

Proposição 1.46. As seguintes afirmações valem:

- K é simétrico
- Se U_1, \dots, U_n é base ortonormal de $T_p M$ então:

$$K(U_n, U_n) = \sum_1^{n-1} k_p(U_n, U_i)$$

1.3.4. *Geodésicas.*

Definição 1.47. Dizemos que $\gamma: I \rightarrow M$ é uma *geodésica* se $\frac{d\gamma}{dt}$ é paralelo ao longo de γ . Ou seja, γ satisfaz

$$(1.1) \quad \frac{D\gamma'}{dt} = 0$$

Notação. Usualmente denotaremos por V o vetor velocidade $\frac{d\gamma}{dt}$ e por A o vetor aceleração $\frac{DV}{dt}$

Escrevendo γ em coordenadas locais, vemos que a equação da geodésica é equivalente a um sistema de n equações de segunda ordem. Portanto, pelo teorema de existência e unicidade de EDO's, dados $p \in M$ e $v \in T_p M$, existe uma única geodésica $\gamma_v: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ tal que $\gamma_v(0) = p$ e $\gamma'_v(0) = v$

Dado $p \in M$, denotamos com \mathcal{D}_p o conjunto de vetores $v \in T_pM$ tais que a geodésica γ_v está definida em $[0, 1]$. Não é difícil mostrar que \mathcal{D}_p é uma vizinhança aberta de $0 \in T_pM$. A aplicação exponencial de (M, g) em p é a função $\exp_p: \mathcal{D}_p \rightarrow M$ definida por $\exp_p(v) = \gamma_v(1)$.

Definição 1.48. Dizemos que M é *geodésicamente completa* se toda geodésica puder ser estendida para todo tempo.

Teorema 1.49. Para todo $p \in M \exists W \ni p$ vizinhança aberta e $\exists \varepsilon > 0$ tal que:

- Todos dois pontos de W são ligados por uma geodésica de tamanho $< \varepsilon$
- Essa geodésica depende diferenciavelmente destes pontos, isto é, se $\exp_{q_1}(tv)$ for a geodésica que liga q_1 e q_2 , então a atribuição $(q_1, q_2) \mapsto (q_1, v)$ é suave.
- $\forall q \in W, \exp_q: B_\varepsilon(0) \rightarrow U_q$ é um difeomorfismo sobre sua imagem $U_q \supset W$ que é um aberto.

Demonstração. Veja por exemplo [10, Lemma 10.3]. □

Chamaremos U_q , como acima, de *bola geodésica de centro q e raio ε de M* , ou de *vizinhança normal de p*

Observação 1.50. O último ítem os diz que existe um sistema de coordenadas “natural”, que depende somente da geometria da variedade.

Em seguida, vamos demonstrar que, localmente, geodésicas são as curvas minimizantes do comprimento de dois de seus pontos. Para provar isso precisaremos de dois lemas:

Lema 1.51 (de Gauss). *As geodésicas que partem de um ponto $p \in M$ são ortogonais às esferas geodésicas centradas em p .*

Demonstração. Seja $t \mapsto V(t) \in T_pM$ uma curva qualquer tal que $\|V(t)\| = 1, \forall t$, então se $f(r, t) \doteq \exp_p(rV(t))$, queremos provar que $g\left(\frac{\partial f}{\partial r}, \frac{\partial f}{\partial t}\right) = 0$. De fato, como $f(0, t) = p$ então $\frac{\partial f}{\partial t}(0, s) = 0$, logo $g\left(\frac{\partial f}{\partial r}, \frac{\partial f}{\partial t}\right)(0, s) = 0$.

Nos resta mostrar que $g(\frac{\partial f}{\partial r}, \frac{\partial f}{\partial t})(r, s)$ independe de r . Com efeito

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial r} [g(\frac{\partial f}{\partial r}, \frac{\partial f}{\partial t})] = \\ & = g(\frac{D}{dr} \frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial r}) + g(\frac{\partial f}{\partial t}, \frac{D}{dr} \frac{\partial f}{\partial r}) = \\ & \quad g(\frac{D}{dr} \frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial r}) + 0 = g(\frac{D}{dt} \frac{\partial f}{\partial r}, \frac{\partial f}{\partial r}) = \\ & \quad \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} g(\frac{\partial f}{\partial r}, \frac{\partial f}{\partial r}) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \|V(t)\| = 0 \end{aligned}$$

□

Seja $\omega: [a, b] \rightarrow U_q \setminus \{p\} = B_\varepsilon^g(p) \setminus \{p\}$ diferenciável por partes, então podemos escrever $\omega(t) = \exp_p(r(t)V(t))$, com $r(t) \in (0, \varepsilon)$ e $\|V(t)\| = 1$;

Lema 1.52. *Se ω for como acima então $\ell(\omega) \geq |r(b) - r(a)|$, onde a igualdade vale somente se r é monotona e V constante.*

Demonstração. Seja $f(r, t) \doteq \exp_p(rV(t))$, então $\frac{d\omega}{dt} = \frac{\partial f}{\partial r} r'(t) + \frac{\partial f}{\partial t}$ e por pitágoras temos que:

$$\|\frac{d\omega}{dt}\|^2 = |r'(t)|^2 + \|\frac{\partial f}{\partial t}\|^2 \geq |r'(t)|^2$$

E a igualdade ocorre sse $\frac{\partial f}{\partial t} = 0 \iff \frac{dV}{dt} = 0$. Logo $\ell(\omega) \geq \int_a^b |r'(t)| \geq |r(b) - r(a)|$, onde a última igualdade ocorre sse $r'(t) \geq 0$. □

Observe que este Lema nos diz que o “menor caminho” que une duas esferas geodésicas é uma geodésica radial.

Estamos prontos para ennciar e demonstrar o seguinte teorema

Teorema 1.53. *Seja $p \in M$ e W, ε como no teorema anterior e $\gamma: I \rightarrow M$ geodésica de comprimento $< \varepsilon$, unindo dois pontos de W , e $\omega: I \rightarrow M$ diferenciável por partes unindo os mesmo pontos. Então $\ell(\gamma) \leq \ell(\omega)$ e $\ell(\gamma) = \ell(\omega)$ sse $\gamma(I) = \omega(I)$*

Demonstração. Sejam $q \doteq \gamma(0)$ e $q' \doteq \gamma(1) = \exp_q(rv)$, onde $r \in (0, \varepsilon)$ e $\|v\| = 1$, então $\ell(\gamma) = r$ e além disso $\forall \delta \in (0, r)$ temos que um segmento de ω , digamos ω_δ , liga $S_\delta(q)$ e $S_r(q) \ni q'$. Portanto pelo lema anterior

$\ell(\omega) \geq \ell(\omega_\delta) \geq r - \delta$, assim $\ell(\omega) \geq r = \ell(\gamma)$, e se $\omega[0, 1] \neq \gamma[0, 1] \implies \ell(\omega) > \ell(\gamma)$ \square

Observação 1.54. Se $\rho: M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ for tal que $\rho(p, q) = \inf\{\ell(\gamma); \gamma: I \rightarrow M \text{ diferenciável por partes tal que } \gamma(0) = p, \gamma(1) = q\}$, então ρ é uma métrica que induz a mesma topologia de M .

Corolário 1.55. Se $\omega: [0, s] \rightarrow M$ é diferenciável por partes e $\ell(\omega) = \rho(\omega(0), \omega(s))$ então ω é geodésica.

Demonstração. $\forall t \exists W$ vizinhança de $\omega(t)$ como no teorema anterior, e portanto ω deve ser geodésica enquanto estiver em W e portanto ω é geodésica. \square

Definição 1.56. Uma geodésica $\gamma: [a, b] \rightarrow M$ é dita *minima*, ou *minimal* se $\ell(\gamma) = \rho(\gamma(a), \gamma(b))$

Observação 1.57. O teorema nos diz que todo segmento, suficientemente pequeno, de uma geodésica é minimal

Teorema 1.58 (Hopf-Rinow). Se $p \in M$ então são equivalentes:

- M é geodésicamente completa
- Todo conjunto limitado tem fecho compacto
- (M, ρ) é completo

E qualquer uma das afirmações acima implica que $(\star) \forall q \in M, \exists \gamma$ geodésica minimal que une p, q

Demonstração. Se M é geodésicamente completa, e $q \in M$, chamde de $r \doteq \rho(p, q)$, seja $x_0 \in S_\delta(p)$ tal que $\rho(S_\delta(p), q) = \rho(x_0, q)$, então $x_0 = \exp_p(\delta v)$, onde $\|v\| = 1$. Seja $\gamma(s) \doteq \exp_p(sv)$, é suficiente mostrar que $\gamma(r) = q$. Se $A \doteq \{s \in [0, r] : \rho(\gamma(s), q) = r - s\}$, vamos provar que se $s_0 \in A$ então para algum $\eta > 0, s_0 + \eta \in A$ e assim como A é compacto $\sup A = r \in A$ e teremos que $\gamma(r) = q$. Com efeito se $s_0 \in A$ e $x_1 \in S_\eta(\gamma(s_0))$ tal que $\rho(x_1, q) = \rho(S_\eta(\gamma(s_0)), q)$ então como $r - s_0 = \rho(\gamma(s_0), q) = \eta + \rho(x_1, q) \implies \rho(x_1, q) = r - s_0 - \eta$ e portanto $\rho(x_1, p) \geq \rho(p, q) - \rho(q, x_1) = r - (r - s_0 - \eta) = s_0 + \eta$ portanto se η for suficientemente pequeno existe uma geodésica minimizante, α que liga

$\gamma(s_0)$ e x_1 e assim a “geodésica quebrada”, β , dada por γ até $\gamma(s_0)$ e α até x_1 , é uma curva minimizante entre p e x_1 e assim β é uma geodésica e mais do que isso $\beta = \gamma|_{[0, s_0 + \eta]}$ e portanto $\gamma(s_0 + \eta) = x_1$ e por fim $\rho(x_1, q) = r - s_0 - \eta = \rho(\gamma(s_0 + \eta), q) \implies s_0 + \eta \in A$.

Vamos provar que se M é geodesicamente completa então todo conjunto limitado tem fecho compacto. De fato se A é limitado $\exists r > 0$ tal que $\forall a \in A, \rho(a, p) \leq r$, assim por $(\star) \exists r'$ tal que $B_r(p) \subset \exp_p \overline{B_{r'}}(0)$ que é compacto pois \exp_p é contínua. E assim A tem fecho compacto.]

Se todo conjunto limitado tem fecho compacto em M , então trivialmente (M, ρ) é completo.

Se (M, ρ) é completo então suponha que $\exists \gamma$ geodésica com velocidade unitária definida para $s < s_0$ e não definida em s_0 . Se $s_n \uparrow s_0$, como $\rho(\gamma(s_n), \gamma(s_m)) \leq |s_n - s_m|$, então $\gamma(s_n)$ é de Cauchy e portanto $\gamma(s_n) \rightarrow p_0 \in M$, seja W, δ como no teorema 1.49 vizinhança de p_0 , então se $k \in \mathbb{N}$ for tal que para $n, m > k$ temos que $|s_n - s_m|$ e $\gamma(s_n), \gamma(s_m) \in W$. Então $\exists! \alpha$ geodésica de comprimento $< \delta$ que une $\gamma(s_n)$ e $\gamma(s_m)$, logo α coincide com γ no domínio de γ e $\exp_{\gamma(s_n)}$ está definida para todo v de norma menor que δ , assim α está definida para $s_n + \delta$ e portanto α estende γ além de s_0 . \square

1.4. Topologia do Espaço de Caminhos.

Definição 1.59. Sejam $p, q \in M$ denotamos por $\Omega = \Omega(M) = \Omega(p, q) \doteq \{\gamma: I \rightarrow M; \gamma(0) = p, \gamma(1) = q \text{ diferenciável por partes}\}$, o *espaço de caminhos*. Se $\omega \in \Omega$ definimos o *espaço tangente à Ω em ω* , $T_\omega \Omega \doteq \{W \in \mathfrak{X}(\alpha); W(0) = 0 = W(1), W \text{ diferenciável por partes}\}$

Se M é conexo podemos tomar uma métrica em $\Omega(p, q)$, a ver

$$d(\alpha, \beta) = \sup_t \rho(\alpha(t), \beta(t)) + \left[\int_0^1 (\|\alpha'(t)\| - \|\beta'(t)\|)^2 dt \right]^{1/2}$$

E assim temos que Ω é um espaço métrico.

Definição 1.60. Uma *variação de $\omega \in \Omega$ por n parâmetros* é uma função $\bar{\alpha}: U(0) \rightarrow \Omega$, onde $U(0) \subset \mathbb{R}^n$ aberto, tal que $\bar{\alpha}(0) = \omega$. Uma variação por n parâmetros, $\bar{\alpha}$, pode ser vista como uma função $\alpha: U(0) \times I \rightarrow$

M , onde $\alpha(u, t) = \bar{\alpha}(u)(t)$. Definimos $\frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial u_i}(0)_t = (W_i)_t \doteq \frac{\partial \alpha}{\partial u_i}(0, t)$ e dizemos que W_i é o i -ésimo vetor variacional de α

Observação 1.61. Se α é uma variação de ω então, seus vetores variacionais são elementos de $T_\omega \Omega$. E a recíproca também é verdadeira, se $W \in T_\omega \Omega$, então existe uma variação $\bar{\alpha}$ tal que $W = \frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial u}(0)$, com efeito basta tomar $\alpha(u, t) = \exp_{\omega(t)}(uW_t)$.

1.4.1. Cálculo das variações.

Definição 1.62. Se $F: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ dizemos que ω é ponto crítico de F se $\forall \bar{\alpha}$ variação de ω $\frac{d}{du} F(\bar{\alpha}(u))|_{u=0} = 0$

Se $\omega \in \Omega(p, q)$ denotamos por $E_a^b(\omega) \doteq \int_a^b \|\omega'(t)\|^2 dt$, e dizemos que E é a *energia do caminho* ω .

Observe que se $\omega: [a, b] \rightarrow M$ diferenciável por partes, usando Cauchy-Schwarz temos que $\ell(\omega) \leq \sqrt{(b-a)}\sqrt{E(\omega)} \implies \ell(\omega)^2 \leq (b-a)E(\omega)$, e a igualdade vale sse $\|\omega'(t)\|$ é constante. Em particular se $\gamma: I \rightarrow M$ é uma geodésica então $\ell(\gamma) = E(\gamma)$.

Lema 1.63. A energia assume seu mínimo exatamente nas geodésicas minimais que ligam p, q

Demonstração. Seja $\gamma: I \rightarrow M$ geodésica minimizante entre p e q , temos que para toda curva diferenciável por partes $\omega: I \rightarrow M$, que une p e q , $\ell(\gamma) \leq \ell(\omega)$, assim $E(\gamma) = \ell(\gamma)^2 \leq \ell(\omega)^2 \leq E(\omega)$. \square

Vamos definir $\Delta_t F \doteq \lim_{s \rightarrow t^+} F(s) - \lim_{s \rightarrow t^-} F(s)$

Teorema 1.64 (Fórmula da primeira variação). Se $\bar{\alpha}: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \Omega$ for uma variação de ω , e W_t for o vetor variacional de α . Então:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{du} \left(E(\bar{\alpha}(u)) \right) \Big|_{u=0} = - \sum_t g(W_t, \Delta_t \frac{d\omega}{dt}) - \int_0^1 g(W_t, \frac{D}{dt} \frac{d\omega}{dt}) dt$$

$$\begin{aligned}
\text{Demonstração. } E(\bar{\alpha}(u)) &= \int_0^1 \left\| \frac{\partial \alpha}{\partial t}(u, t) \right\|^2 dt \implies \\
\frac{1}{2} \frac{d}{du} E(\bar{\alpha}(u)) &= \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{\partial}{\partial u} g\left(\frac{\partial}{\partial t} \alpha(u, t), \frac{\partial}{\partial t} \alpha(u, t)\right) dt = \\
&= \int_0^1 g\left(\frac{D}{du} \frac{\partial}{\partial t} \alpha(u, t), \frac{\partial}{\partial t} \alpha(u, t)\right) dt = \int_0^1 g\left(\frac{D}{dt} \frac{\partial}{\partial u} \alpha(u, t), \frac{\partial}{\partial t} \alpha(u, t)\right) dt = \\
&= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} g\left(\frac{\partial}{\partial u} \alpha(u, t), \frac{\partial}{\partial t} \alpha(u, t)\right) - g\left(\frac{\partial}{\partial u} \alpha(u, t), \frac{D}{dt} \frac{\partial}{\partial t} \alpha(u, t)\right) dt = \\
&= \sum_i \int_{t_i}^{t_{i+1}} \frac{\partial}{\partial t} g\left(\frac{\partial}{\partial u} \alpha(u, t), \frac{\partial}{\partial t} \alpha(u, t)\right) dt - \int_0^1 g\left(\frac{\partial}{\partial u} \alpha(u, t), \frac{D}{dt} \frac{\partial}{\partial t} \alpha(u, t)\right) dt = \\
&= \sum_i g\left(\frac{\partial}{\partial u} \alpha(u, t), \frac{\partial}{\partial t} \alpha(u, t)\right) \Big|_{t_i}^{t_{i+1}} - \int_0^1 g\left(\frac{\partial}{\partial u} \alpha(u, t), \frac{D}{dt} \frac{\partial}{\partial t} \alpha(u, t)\right) dt
\end{aligned}$$

E como $\frac{\partial}{\partial u} \alpha(u, 0) = 0 = \frac{\partial}{\partial u} \alpha(u, 1)$ e calculando $u = 0$ temos que:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{du} E(\bar{\alpha}(u)) \Big|_0 = - \sum_{i>0} g(W_{t_i}, \Delta_{t_i} V) - \int_0^1 g(W, A)$$

□

Corolário 1.65. ω é ponto crítico de E sse ω é geodésica.

Demonstração. Diretamente da fórmula temos que se ω é geodésica, ω é ponto crítico. Já se ω é ponto crítico, tomando α_1 a variação de ω com vetor variacional $W(t) = h(t)A(t)$, onde $h(t)$ é positiva exceto em t_i que é zero. Então

$$0 = \frac{1}{2} \frac{d}{du} E(\bar{\alpha}_1(u)) \Big|_0 = - \int_0^1 h(t) \|A(t)\|^2 dt = \sum_i \int_{t_i}^{t_{i+1}} h(t) \|A(t)\|^2 dt$$

E assim $A = \frac{D}{dt} \frac{d\omega}{dt} = 0$ em $(t_i, t_{i+1}) \forall i$.

Escolhendo uma variação α_2 com vetor variacional \tilde{W} tal que $\tilde{W}_{t_i} = \Delta_{t_i} V$, então pela fórmula da primeira variação temos que

$$0 = \frac{1}{2} \frac{d}{du} E(\bar{\alpha}_2(u)) \Big|_0 = - \sum_i \|\Delta_{t_i} V\|^2$$

Logo $\Delta_{t_i} V = 0, \forall i$, assim ω é C^1 e satisfaz a equação de geodésica e portanto é uma geodésica. □

Definição 1.66. Definimos a *hessiana de E* em um caminho crítico, γ , é a aplicação bilinear $E_{**}: T_\gamma\Omega \times T_\gamma\Omega \rightarrow \mathbb{R}$, definida da seguinte forma: Se α é uma variação a dois parametros de γ , e W_1, W_2 seus vetores variacionais, definimos:

$$E_{**}(W_1, W_2) \doteq \frac{\partial^2}{\partial u_1 \partial u_2} E(\alpha(u_1, u_2)) \Big|_{(0,0)}$$

O seguinte teorema nos mostra que a definição acima está bem definida.

Teorema 1.67 (Fórmula da segunda variação).

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2}{\partial u_1 \partial u_2} E(\bar{\alpha}(u_1, u_2)) \Big|_{(0,0)} = \\ & - \sum_t g((W_2)_t, \Delta_t \frac{DW_1}{dt}) - \int_0^1 g(W_2, \frac{D^2 W_1}{dt^2} + R(V, W_1)V) dt \end{aligned}$$

Demonstração. Usando a fórmula da primeira variação obtemos:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2}{\partial u_1 \partial u_2} E(\alpha(u_1, u_2)) = \\ & - \sum_t g(\frac{D}{du_1} \frac{\partial \alpha}{\partial u_2}, \Delta_t \frac{\partial \alpha}{\partial t}) - \sum_t g(\frac{\partial \alpha}{\partial u_2}, \frac{D}{du_1} \Delta_t \frac{\partial \alpha}{\partial t}) \\ & - \int_0^1 g(\frac{D}{du_1} \frac{\partial \alpha}{\partial u_2}, \frac{D}{dt} \frac{\partial \alpha}{\partial t}) dt - \int_0^1 g(\frac{\partial \alpha}{\partial u_2}, \frac{D}{du_1} \frac{D}{dt} \frac{\partial \alpha}{\partial t}) dt \end{aligned}$$

Avaliando em $(0, 0)$ temos que:

$$\begin{aligned} & = - \sum_t g(W_{2t}, \frac{D}{du_1} \Delta_t \frac{\partial \alpha}{\partial t}) - \int_0^1 g(\frac{\partial \alpha}{\partial u_2}, \frac{D}{du_1} \frac{D}{dt} V) dt = \\ & = - \sum_t g(W_{2t}, \Delta_t \frac{D}{dt} W_1) - \int_0^1 g(\frac{\partial \alpha}{\partial u_2}, \frac{D}{du_1} \frac{D}{dt} V) dt = \\ & = - \sum_t g(W_{2t}, \Delta_t \frac{D}{dt} W_1) - \int_0^1 g(\frac{\partial \alpha}{\partial u_2}, \frac{D}{dt} \frac{D}{du_1} V + R(\frac{\partial \alpha}{\partial t}, \frac{\partial \alpha}{\partial u_1})V) dt = \\ & = - \sum_t g(W_{2t}, \Delta_t \frac{D}{dt} W_1) - \int_0^1 g(\frac{\partial \alpha}{\partial u_2}, \frac{D}{dt} \frac{D}{dt} W_1 + R(V, W_1)V) dt \end{aligned}$$

□

Corolário 1.68. Se γ é minimizante então E_{**} é positiva definida.

Demonstração. Como $\forall \omega \in \Omega, E(\omega) \geq E(\gamma)$ então $\forall \alpha$ variação de γ
 $E(\alpha(u)) \geq E(\alpha(0)) \implies \frac{d^2}{du^2} E(\alpha(u)) \Big|_{u=0} \geq 0 \quad \square$

1.4.2. Campos de Jacobi.

Definição 1.69. Seja γ uma geodésica, dizemos que $J \in \mathfrak{X}(\gamma)$ é de *Jacobi* se satisfaz:

$$(1.2) \quad \frac{D^2 J}{dt^2} + R(\gamma', J)\gamma' = 0$$

Escrevendo um campo de Jacobi em coordenadas, temos que a equação de Jacobi (1.2) corresponde a um sistema linear de n equações de segunda ordem. Portanto temos que dados $V, W \in T_p M$ existe um único campo de Jacobi de J , definido para todo tempo, tal que $J(0) = V$ e $\frac{DJ}{dt}(0) = W$. Em particular a equação (1.2) tem $2n$ soluções l.i.

Exemplo 1.70. Se $\bar{\alpha}$ for uma variação de uma geodésica γ tal que $\bar{\alpha}(u)$ é uma geodésica para todo $u \in U(0)$, então os vetores variacionais de α são de Jacobi pois:

$$\frac{D^2}{dt^2} J = \frac{D}{dt} \frac{D}{dt} \frac{\partial \alpha}{\partial u} = \frac{D}{dt} \frac{D}{du} \frac{\partial \alpha}{\partial t} = \frac{D}{du} \frac{D}{dt} \frac{\partial \alpha}{\partial t} - R\left(\frac{\partial \alpha}{\partial t}, \frac{\partial \alpha}{\partial u}\right) \frac{\partial \alpha}{\partial t} = -R(V, J)V$$

Proposição 1.71. *Todo campo de Jacobi é como acima*

Demonstração. Existe W vizinhança de $\gamma(0)$ tal que $\forall p_1, p_2 \in W, \exists!$ geodésica que os liga. Seja $\delta > 0$ tal que $\gamma(t) \in W, \forall t \in (0, \delta)$. Vamos construir um campo de Jacobi em $\gamma|_{[0, \delta]}$ com valores iniciais e finais predeterminados. Assim tome $\beta_1: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow W$ tal que $\beta_1(0) = \gamma(0), \beta_1'(0) = V_1$ dado, e $\beta_2: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow W$ tal que $\beta_2(0) = \gamma(\delta), \beta_2'(0) = V_2$ dado.

Defina $\alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \times [0, \delta] \rightarrow M$ tal que $\alpha(u, *)$ é a geodésica que liga $\beta_1(u)$ e $\beta_2(u)$. Desta forma, como vimos acima $\frac{\partial \alpha}{\partial u}(0, t)$ é de Jacobi, com $\frac{\partial \alpha}{\partial u}(0, 0) = V_1$ e $\frac{\partial \alpha}{\partial u}(0, \delta) = V_2$. Portanto a aplicação:

$$\begin{aligned} L: \mathcal{J}(\gamma) &\longrightarrow T_{\gamma(0)}M \times T_{\gamma(\delta)}M \\ J &\longmapsto (J(0), J(\delta)) \end{aligned}$$

É sobrejetora, e como $\dim \mathcal{J}(\gamma) = 2n = \dim T_{\gamma(0)}M \times T_{\gamma(\delta)}M$ temos que L é isomorfismo. Logo um campo de Jacobi é unicamente determinado

por seus pontos iniciais e finais em uma vizinhança normal. Agora observe que se tomado ε suficientemente pequeno, por dependência contínua das condições iniciais da equação de Jacobi, podemos estender $\alpha(u)$ a $[0, 1]$ para todo $u \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. \square

Definição 1.72. Dizemos que p e q são conjugados ao longo da geodésica γ se $\exists J$ campo de Jacobi tal que $J(0) = 0 = J(1)$. A multiplicidade de p e q como pontos conjugados ao longo de γ é a dimensão do espaço de tais campos de Jacobi.

Observação 1.73. p e q são conjugados ao longo de $\exp_p(tv)$, onde $\exp_p(v) = q$, sse v é ponto crítico de \exp_p

Proposição 1.74. Seja $W \in T_\gamma\Omega$, então $W \in \ker E_{**} \iff W$ é de Jacobi

Demonstração. Se W_1 é de Jacobi temos que pela fórmula da segunda variação $E_{**}(W_1, *) = 0 \implies W_1 \in \ker E_{**}$.

Já se $W_1 \in \ker E_{**}$, tome $W_2 \in T_\gamma\Omega$ tal que $(W_2)_t = \left[\frac{D^2}{dt^2} W_1 + R(V, W_1)V \right] f(t)$, onde $f: I \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ e $f(t) = 0 \iff t = t_i$. Então $E_{**}(W_1, W_2) = 0 = -\int_0^1 f \left\| \frac{D^2}{dt^2} W_1 + R(V, W_1)V \right\|^2 \implies \frac{D^2}{dt^2} W_1 + R(V, W_1)V = 0$ nos intervalos $[t_i, t_{i+1}]$.

Ja se escolhermos $W_3 \in T_\gamma\omega$ tal que $(W_3)_{t_i} = \Delta_{t_i} \frac{DW_1}{dt}$, temos que $E_{**}(W_1, W_3) = 0 = -\sum \left\| \Delta_{t_i} \frac{DW_1}{dt} \right\| \implies \Delta_{t_i} \frac{DW_1}{dt} = 0 \implies W_1$ é diferenciável e satisfaz a equação de Jacobi, portanto é um campo de Jacobi. \square

Corolário 1.75. $\dim \ker E_{**} \leq n$

Demonstração. Como os elementos do $\ker E_{**}$ são precisamente os campos de Jacobi que se anulam em 0 e 1, então $\dim \ker E_{**} \leq \dim \{J \in \mathcal{J}(\gamma) : J(0) = 0\} = n$ \square

Observação 1.76. Na verdade vale a desigualdade estrita no corolário acima, pois sempre podemos encontrar um campo de Jacobi que se anula em 0 e não em 1. Por exemplo $J(t) = tV(t)$

1.4.3. Índice de Morse.

Definição 1.77. Dizemos que λ é o *índice da hessiana*

$$E_{**}: T_\gamma\Omega \times T_\gamma\Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

Se λ é a dimensão máxima de um subespaço de $T_\gamma\Omega$ no qual E_{**} é negativa definida

Vamos fazer uma aproximação finito dimensional para $T_\gamma\Omega$.

Seja $\gamma: I \rightarrow M$ uma geodésica, pelo teorema 1.49, temos que existe $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k = 1$, tais que $\gamma|_{[t_i, t_{i+1}]}$ tem imagem totalmente contida em uma vizinhança normal para todo i .

Definição 1.78. Definimos

$$\begin{aligned} T_\gamma\Omega(t_0, \dots, t_k) &\doteq \{W \in T_\gamma\Omega : W|_{[t_i, t_{i+1}]} \text{ é um campo de Jacobi para todo } i\} \\ T' &\doteq \{W \in T_\gamma\Omega : W(t_i) = 0 \forall i\} \end{aligned}$$

Lema 1.79. As seguintes afirmações valem:

- (1) $T_\gamma\Omega = T' \oplus T_\gamma\Omega(t_0, \dots, t_k)$
- (2) T' é ortogonal a $T_\gamma\Omega(t_0, \dots, t_k)$ com respeito à E_{**}
- (3) $E_{**}|_{T' \times T'}$ é positiva definida

Demonstração. 1) Seja $W \in T_\gamma\Omega$, defina W_1 como o campo de Jacobi “quebrado” que coincide com W nos pontos t_i . Observe que existe um tal campo pois $\gamma|_{[t_i, t_{i+1}]}$ tem imagem totalmente contida em uma vizinhança normal. E defina $W_2 = W - W_1$, evidentemente $W_1 \in T_\gamma\Omega(t_0, \dots, t_k)$ e $W_2 \in T'$, e por último $W = W_1 + W_2$, assim, como $T' \cap T_\gamma\Omega(t_0, \dots, t_k) = \{0\} \implies T_\gamma\Omega = T' \oplus T_\gamma\Omega(t_0, \dots, t_k)$

2) Vem diretamente da fórmula da segunda variação.

3) Seja $W \in T'$ primeiro observe que como $W_{t_i} = 0$ temos que $\exists \alpha$ variação de γ com W seu vetor variacional tal que $\alpha(u, t_i) = \gamma(t_i), \forall u$, portanto $E(\alpha(u)) \geq E(\gamma), \forall u \implies E_{**}(W, W) = \frac{1}{2} \frac{d^2}{du^2} E(\alpha(u))|_{u=0} \geq 0$.

Vamos provar que de fato $E_{**}(W, W) > 0$ se $W \neq 0$. Com efeito, se $E_{**}(W, W) = 0$ e se $U \in T'$, então pelo o que acabamos de provar $\forall c \in \mathbb{R}$

$$0 \leq E_{**}(W + cU, W + cU) = 0 + 2cE_{**}(W, U) + c^2E_{**}(U, U)$$

Que implica que $E_{**}(W, U) = 0$ e portanto juntamente com 2) concluímos que $W \in \ker E_{**} = T_\gamma \Omega(t_0, \dots, t_k) \implies W = 0$.

□

Corolário 1.80. $i(E_{**}) = i(E_{**}|_{T_\gamma \Omega(t_0, \dots, t_k)}) < \infty$

Demonstração. Como os espaços $T_\gamma \Omega(t_0, \dots, t_k)$ e T' são E_{**} -ortogonais, então o índice de E_{**} é a soma dos índices das restrições de E_{**} a cada um desses espaços. Já que a restrição de E_{**} a T' é definida positiva, a igualdade na tese segue. Para verificar que o índice de $E_{**}|_{T_\gamma \Omega(t_0, \dots, t_k)}$ é finito basta observar que $T_\gamma \Omega(t_0, \dots, t_k)$ tem dimensão finita. □

Teorema 1.81 (Índice de Morse). *O índice de E_{**} em γ é igual ao número de pontos, $\gamma(t)$, com $t \in (0, 1)$, tal que $\gamma(t)$ é conjugado com $\gamma(0)$ (contado com a multiplicidade).*

Demonstração. Sejam $\gamma_\tau = \gamma|_{[0, \tau]}$ e $\lambda(\tau) = i((E_0^\tau)_{**})$. Então

Afirmção (1). $\lambda(\tau)$ é monotona

Se $\tau < \tau'$ e V^τ for um subespaço de dimensão $\lambda(\tau)$ tal que $(E_0^\tau)_{**}$ seja negativa definida, então podemos estender V^τ a um subespaço de $T_{\gamma_{\tau'}} \Omega$ onde $(E_0^{\tau'})_{**}$ é negativo definido. Por exemplo podemos estender um elemento de V^τ como zero após τ .

Afirmção (2). $\lambda(\tau) = 0$ se τ for suficientemente pequeno

De fato, se τ é pequeno γ_τ é minimal, e portanto $(E_0^\tau)_{**}$ é positiva semi-definida (veja Corolário 1.68), e assim $\lambda(\tau) = 0$

Afirmção (3). Se $\varepsilon > 0$ é suficientemente pequeno, temos que $\lambda(\tau - \varepsilon) = \lambda(\tau)$

Podemos assumir que $t_i < \tau < t_{i+1}$, então $\lambda(\tau)$ pode ser visto como o índice de uma forma quadrática H_τ no espaço correspondente de campos de Jacobi quebrados em γ_τ , que é isomorfo a $T_{\gamma(t_1)}M \oplus \dots \oplus T_{\gamma(t_i)}M$ que não depende de τ , portanto ao variar τ podemos estudar a mudança da forma quadrática H_τ em um espaço fixado. Evidentemente essa variação é contínua e portanto se V é subespaço onde H_τ é negativa definida então para $\tau' \sim \tau$ $H_{\tau'}$ também é negativa definida em V .

Afirmção (4). Se $\nu = \dim \ker((E_0^\tau)_{**})$, então para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno $\lambda(\tau + \varepsilon) = \lambda(\tau) + \nu$

Por um argumento análogo ao de acima podemos provar que $\lambda(\tau + \varepsilon) \leq \lambda(\tau) + \nu$.

Então nos resta mostrar que $\lambda(\tau + \varepsilon) \geq \lambda(\tau) + \nu$. Sejam $W_1, \dots, W_{\lambda(\tau)} \in T_{\gamma_\tau} \Omega$ tal que $(E_{0**}^\tau(W_i W_j))_{i,j}$ é negativa definida. $J_1, \dots, J_\nu \in T_{\gamma_\tau} \Omega$ campos de Jacobi l.i.. Pela teoria de equações diferenciais ordinárias temos que $\frac{DJ_i}{dt}(\tau)$ são l.i., assim a matriz cujas colunas são $\frac{DJ_i}{dt}(\tau)$ é inversível e portanto $\exists X_1(\tau), \dots, X_\nu(\tau)$ tal que $g(\frac{DJ_i}{dt}(\tau), X_j(\tau)) = \delta_{i,j}$, assim sejam $X_1, \dots, X_\nu \in T_{\gamma_{\tau+\varepsilon}} \Omega$ campos que estendem $X_1(\tau), \dots, X_\nu(\tau)$. Estendendo os campos J e W para elementos $T_{\gamma_{\tau+\varepsilon}} \Omega$ como zero após τ , temos que pela fórmula da segunda variação:

$$\begin{aligned} E_{0**}^\tau(J_i, W_j) &= 0 \\ E_{0**}^\tau(J_i, X_k) &= 2\delta_{i,k} \end{aligned}$$

Afirmamos que os vetores: $W_1, \dots, W_{\lambda(\tau)}, c^{-1}J_1 - cX_1, \dots, c^{-1}J_\nu - cX_\nu$ são l.i., isto segue de um argumento elementar. Além disso $E_{0**}^{\tau+\varepsilon}$ restrito ao espaço gerado por esses vetores é negativo definido pois a matriz que representa $E_{0**}^{\tau+\varepsilon}$ nesta base é:

$$\begin{pmatrix} (E_{**}^\tau(W_i, W_j))_{i,j} & cA \\ cA^t & -4\text{Id} + c^2B \end{pmatrix}$$

onde $A = (-E_{**}^\tau(W_i, X_j))_{i,j}$, $B = (E_{**}^\tau(X_i, X_k))_{i,k}$. Para $c = 0$ esta matriz é negativa definida, e por continuidade ela continuará negativa definida para c pequeno. \square

1.4.4. Aproximações do espaço de caminhos.

Notação. Denotaremos por

$$\begin{aligned}\Omega^c &\doteq E^{-1}([0, c]) \\ \text{int } \Omega^c &\doteq E^{-1}([0, c)) \\ \Omega(t_0, \dots, t_k) &\doteq \{ \gamma \in \Omega : \gamma|_{[t_i, t_{i+1}]} \text{ é geodésica} \} \\ \Omega(t_0, \dots, t_k)^c &\doteq \Omega^c \cap \Omega(t_0, \dots, t_k) \\ \text{int } \Omega(t_0, \dots, t_k)^c &\doteq \text{int } \Omega^c \cap \Omega(t_0, \dots, t_k) \\ E' &= E|_{\text{int } \Omega(t_0, \dots, t_k)^c}\end{aligned}$$

Lema 1.82. *Se M é completa e $c > 0$ tal que $\Omega^c \neq \emptyset$, então dado que t_0, \dots, t_k é suficientemente fino, temos que $\text{int } \Omega(t_0, \dots, t_k)^c$ é variedade.*

Demonstração. Defina $S \doteq \overline{B(p, \sqrt{c})}$, observe que se $\omega \in \Omega^c$ então $\omega[0, 1] \subset S$. Como M é completo temos que S é compacto pelo teorema 1.58. Desta forma $\exists \varepsilon > 0$ tal que se $\rho(x, y) < \varepsilon$, temos que $\exists!$ geodésica que une x e y com comprimento $< \varepsilon$. Escolha $0 = t_0 < \dots < t_k = 1$ tal que $t_{i+1} - t_i < \frac{\varepsilon^2}{c}$ então $\forall \omega \in \Omega(t_0, \dots, t_k)^c$

$$\ell_{t_i}^{t_{i+1}}(\omega)^2 < \varepsilon^2$$

Logo $\omega|_{[t_i, t_{i+1}]}$ é unicamente determinada por $\omega(t_i)$ e $\omega(t_{i+1})$, e além disso a dependência do ponto final e inicial é diferenciável. Assim $\omega \mapsto (\omega(t_1), \dots, \omega(t_{k-1}))$ é um homeomorfismo entre $\text{int } \Omega(t_0, \dots, t_k)^c$ e um subconjunto aberto de $M \times M \times \dots \times M$. E por fim podemos então dar a estrutura diferenciável de $M \times M \times \dots \times M$ para $\text{int } \Omega(t_0, \dots, t_k)^c$. \square

Teorema 1.83. *As seguintes afirmações valem:*

- (1) E' é diferenciável
- (2) $B^a \doteq E'^{-1}([0, a])$ é compacto e é um retrato por deformação de Ω^a
- (3) Os pontos críticos de E' são os mesmo dos de E em $\text{int } \Omega^c$
- (4) Os índices de E e E' num ponto crítico coincidem.

Demonstração. Vamos denotar por B' o conjunto $\text{int } \Omega(t_0, \dots, t_k)^c$.

1) Em B' , E tem uma fórmula explícita, com efeito, se $\omega \in B'$ então $E'(\omega) = E(\omega) = \sum_i \frac{\rho(\omega(t_{i-1}), \omega(t_i))^2}{t_i - t_{i-1}}$

2) Se $a < c$ temos que B^a é homeomorfa a $\{(p_1, \dots, p_k) \in S^{k-1} : \sum_i \frac{\rho(p_{i-1}, p_i)^2}{t_i - t_{i-1}} \leq a\}$. Logo B^a é homeomorfo a um fechado contido no compacto $S \times S \times \dots \times S$, e assim B^a é compacta.

Como $\rho(p, \omega(t))^2 \leq \ell(\omega)^2 \leq E(\omega) < c \implies \omega[0, 1] \subset S$ e portanto $\rho(\omega(t_{i-1}), \omega(t_i))^2 \leq (t_i - t_{i-1})E_{t_{i-1}}^{t_i}(\omega) < \frac{\varepsilon^2}{c}c = \varepsilon^2$ que implica que $\exists!$ geodésica que une $\omega(t_{i-1})$ e $\omega(t_i)$, assim podemos definir $r(\omega)$ como a curva que em cada trecho $r(\omega)|_{[t_i, t_{i+1}]}$ é a geodésica que liga $\omega(t_i)$ e $\omega(t_{i+1})$. Claramente $E(r(\omega)) \leq E(\omega) < c$ e assim:

$$\begin{aligned} r: \text{int } \Omega^c &\rightarrow B' \\ \omega &\mapsto r(\omega) \end{aligned}$$

está bem definida. De maneira similar podemos definir $r_u: \text{int } \Omega^c \rightarrow B'$, de forma que se $t_{i-1} < u \leq t_{i+1}$:

$$r_u(t) = \begin{cases} r(\omega)(t); & \text{se } t \in [0, t_i] \\ s(\omega)(t); & \text{se } t \in [t_i, u] \\ \omega(t) & \text{se } t \in [u, 1] \end{cases}$$

onde $s(\omega)$ é a geodésica que une $\omega(t_i)$ e $\omega(u)$. Assim $r_0 = \mathcal{I}_{B'}$ e $r_1 = r$, e portanto r_u é homotopia desejada. Logo B' é retrato por deformação de $\text{int } \Omega^c$ e analogamente B^a é retrato por deformação de Ω^a .

3) Como cada ponto crítico de E em Ω^c está em B' , então basta verificar que os pontos críticos de E' são as geodésicas, e isso é claro pela fórmula da primeira variação.

4) Podemos identificar $T_\gamma B' = T_\gamma \Omega(t_0, \dots, t_k)^2$. O índice de E' coincide com o índice da restrição de E_{**} a este espaço. Mas sabemos que o índice desta restrição é igual ao índice de E_{**} por 1.80 \square

Corolário 1.84. *Sejam M completa, $p, q \in M$ não conjugados por nenhuma geodésica de comprimento $\leq \sqrt{a}$, então Ω^a tem o tipo de homotopia de um complexo CW finito, com uma célula de dimensão λ para cada geodésica em Ω^a com índice λ .*

²O espaço tangente ao espaço de geodésicas quebradas é o espaço de campos de Jacobi quebrados.

Demonstração. Basta observar que como B^a é compacto E' só pode ter um número finito de pontos críticos não degenerados em B^a . Como p, q não são conjugados por nenhuma geodésica, temos que todos os pontos críticos de E são não degenerados, em particular, todos os pontos críticos de E' também o são. Assim B^a só contém um número finito de pontos críticos de E' , por 1.16 e 1.83 concluímos. \square

Podemos estudar $\Omega^*(p, q) \doteq \{\gamma: I \rightarrow M \in C : \gamma(0) = p, \gamma(1) = q\}$, com a métrica $d^*(\alpha, \beta) \doteq \sup_t \rho(\alpha(t), \beta(t))$. Assim $i: \Omega \rightarrow \Omega^*$ é contínua. Além disso, se pode provar que i é equivalência de homotopia.

É sabido que Ω^* que é um complexo-C.W. Portanto, como consequência, temos que Ω é um complexo-C.W.

Teorema 1.85 (Teorema Fundamental da Teoria de Morse). *Sejam M completa e $p, q \in M$ pontos não conjugados, então $\Omega(p, q)$ é um complexo-C.W. contável com uma célula de dim λ para cada geodésica com índice λ unindo p e q .*

Demonstração. Segue imediatamente dos teoremas 1.83 e 1.16. \square

1.4.5. Topologia e Curvatura.

Lema 1.86. *Se a curvatura seccional de uma variedade riemanniana M é não positiva, então M não tem pontos conjugados por nenhuma geodésica.*

Demonstração. Se J é um campo de Jacobi, então:

$$g\left(\frac{D^2 J}{dt^2}, J\right) = -(V, J, V, J) \geq 0$$

Assim $\frac{d}{dt} g\left(\frac{DJ}{dt}, J\right) = g\left(\frac{D^2 J}{dt^2}, J\right) + g\left(\frac{DJ}{dt}, \frac{DJ}{dt}\right) \geq 0$, logo $g\left(\frac{DJ}{dt}, J\right)$ é crescente, estritamente se $\frac{DJ}{dt} \neq 0$, então se J se anula em dois pontos diferentes $0, t_0$ temos que $g\left(\frac{DJ}{dt}, J\right) = 0$ em 0 e em t_0 e portanto $g\left(\frac{DJ}{dt}, J\right)|_{[0, t_0]} = 0$ e assim $\frac{DJ}{dt}|_{[0, t_0]} = 0 \implies J(0) = 0$ e $\frac{DJ}{dt}(0) = 0 \implies J = 0$ \square

Exemplo 1.87. As seguntes variedades completas tem curvatura seccional não positiva:

- (1) \mathbb{R}^n , aqui $R \equiv 0$

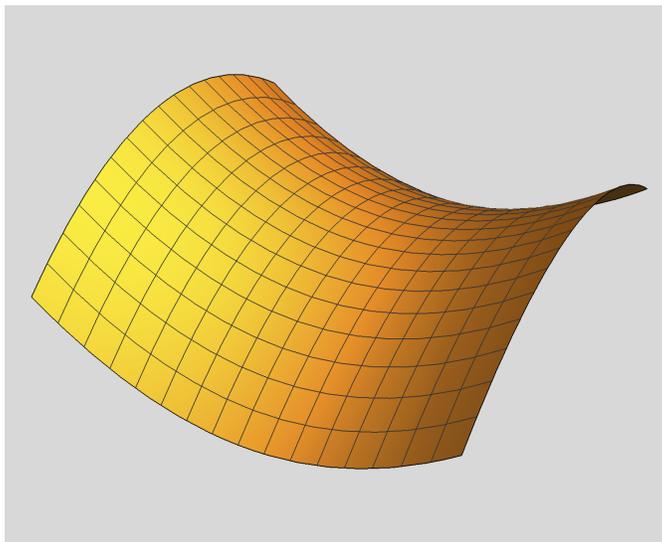


FIGURA 6. Paraboloide Hiperbólico

- (2) O paraboloid hiperbólico em \mathbb{R}^3 , dado pela seguinte equação: $z = x^2 - y^2$, tem curvatura seccional negativa.
- (3) O hiperboloid de rotação em \mathbb{R}^3 , dado pela seguinte equação: $x^2 + y^2 - z^2 = 1$, tem curvatura seccional negativa.
- (4) O helicoid em \mathbb{R}^3 , dado pela seguinte equação: $x \cos z + y \sin z = 0$, tem curvatura seccional negativa.

Todos estes exemplos a curvatura seccional fica arbitrariamente próxima de zero. É sabido que é impossível ter uma superfície completa, em \mathbb{R}^3 , com cota superior negativa da curvatura seccional.

Exemplo 1.88 (Pseudo-Esfera). A superfície em \mathbb{R}^3 dada pela equação

$$z = -\sqrt{1 - x^2 - y^2} + \sec h^{-1} \sqrt{x^2 + y^2} \text{ com } z > 0$$

é chamada de *pseudo-esfera*, e é um exemplo de superfície (não completa) com curvatura seccional constante $\equiv -1$.

De toda forma, existem variedade de dimensão 2, compactas, completas, com curvatura consatnte negativa.

Teorema 1.89 (Cartan). *Seja M completa, simplesmente conexa com curvatura seccional não positiva, então para quaisquer dois pontos de M ,*

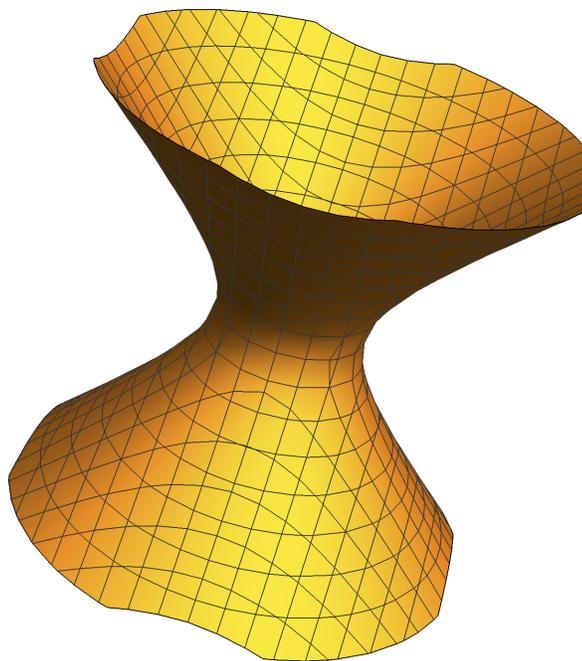


FIGURA 7. Hiperbloide de Rotação

$p, q \in M$ existe uma única geodésica que os liga. Além disso M é difeomorfa a \mathbb{R}^n .

Demonstração. Como vimos antes $\Omega(p, q)$ tem o tipo de homotopia de um complexo-C.W. com uma célula de dimensão λ a cada geodésica de índice λ , como não existem pontos conjugados em M pelo Teorema do Índice de Morse temos que $\Omega(p, q)$ tem o tipo de homotopia de um 0-complexo, ou seja, de uma reunião de pontos. Dado que M é simplesmente conexo temos que $\Omega(p, q)$ é conexo e portanto Ω tem o tipo de homotopia de um ponto, assim existe uma única geodésica que liga p, q . Além disso, como M é completa então $\exp_p: \mathbb{R}^n \rightarrow M$ é sobrejetora, e pelo que acabamos de observar \exp_p é injetora também e portanto como não existem pontos conjugados em M , pela observação 1.73 \exp_p é não singular em todo ponto e portanto é um difeomorfismo \square

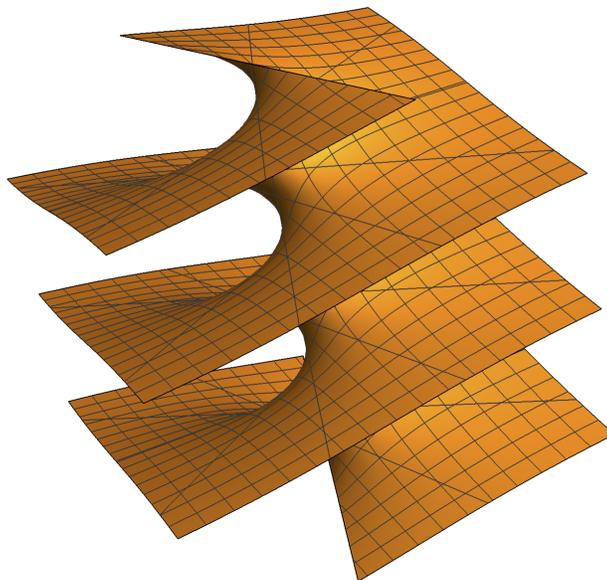


FIGURA 8. Helicoide

Podemos aplicar o teorema acima ao recobrimento universal de variedades não simplesmente conexas, contanto que a variedade seja completa e com curvatura seccional não positivas. Observamos que o recobrimento universal de uma variedade Riemanniana completa e com curvatura não positiva é completa e tem curvatura não positiva.

Teorema 1.90 (Myers). *Suponha que a curvatura de Ricci satisfaça:*

$$K(U, U) \geq \frac{n-1}{r^2}$$

para todo U unitário, onde $r > 0$ é constante. Então toda geodésica de comprimento $> \pi r$ contém pontos conjugados, em particular não é minimal.

Demonstração. Sejam $\gamma: I \rightarrow M$ geodésica com comprimento L e P_1, \dots, P_n campos de vetores paralelos ao longo de γ , ortonormais em um ponto, e portanto em todos os pontos, tais que $V = \frac{d\gamma}{dt} = LP_n$.

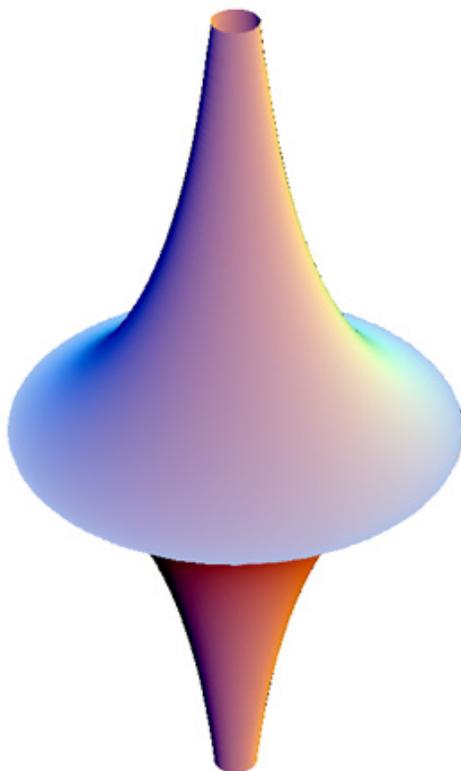


FIGURA 9. Pseudo-Esfera

Defina $W_i(t) \doteq P_i(t) \sin(\pi t)$ assim

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} E_{**}(W_i, W_i) &= - \int_0^1 g(W_i, \frac{D^2 W_i}{dt^2}) + R(V, W_i)V = \\ &= \int_0^1 (\sin \pi t)^2 (\pi^2 - L^2 k(P_n, P_i)) \end{aligned}$$

Somando em i temos:

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} E_{**}(W_i, W_i) = \int_0^1 (\sin \pi t)^2 ((n-1)\pi^2 - L^2 K(P_n, P_n))$$

Logo se $L > \pi r \implies \exists j$ tal que $E(W_j, W_j) < 0 \implies \lambda(\gamma) > 0$, e pelo teorem do índice γ possui pontos conjugados. \square

Corolário 1.91. *Se M é completa e para todo $U \in TM$ unitário, $K(U, U) \geq \frac{n-1}{r^2} \geq 0$, temos que M é compacta com diametro $\leq \pi r$*

Demonstração. Basta utilizar o teorema 1.58 juntamente com 1.68. \square

Teorema 1.92. *Seja M compacta tal que o tensor de Ricci seja positivo definido, então se $p, q \in M$ não forem conjugados $\Omega(p, q)$ tem o tipo de homotopia de um complexo-C.W., com um número finito de células em cada dimensão.*

Demonstração. O conjunto de todos os vetores tangentes unitários é compacto, pois M é compacta, e portanto como K é positivo definido temos que $\exists U \in TM$ unitário tal que $0 < K(U, U) \leq K(V, V)$ para qualquer $V \in TM$ unitário. Definindo r de maneira que $K(U, U) = \frac{n-1}{r^2}$, temos que por uma variação do teorema 1.90, toda geodésica de comprimento $> k\pi r$ tem índice pelo menos k . Assim como p e q não são conjugados por nenhuma geodésica podemos aplicar 1.84 e concluir então que só podem existir um número finito de geodésicas de p a q com comprimento $\leq k\pi r$. Portanto só existem m número finito de geodésicas de índice $< k$ e pelo Teorema Fundamental da Teoria de Morse concluimos. \square

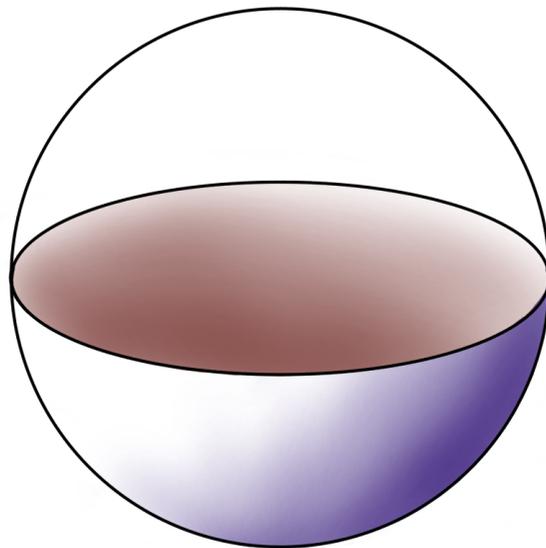


FIGURA 10. 2-célula com uma 1-célula colada

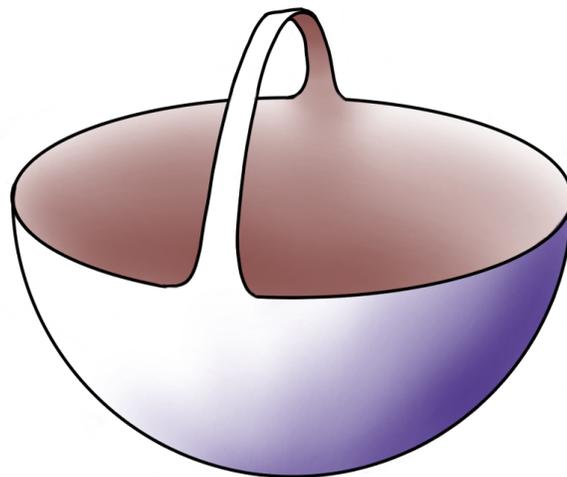


FIGURA 11. Engrossando a 1-célula

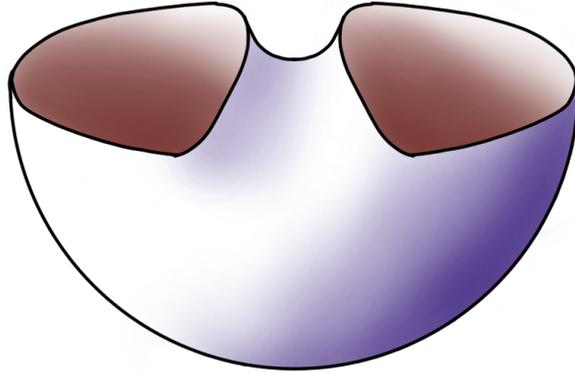
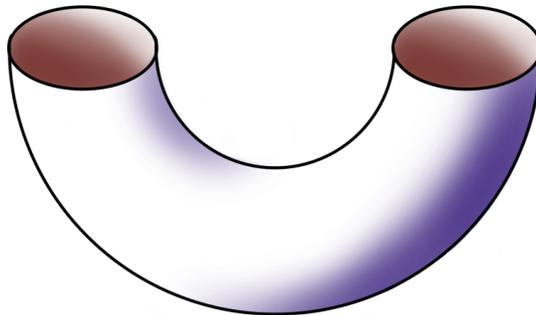


FIGURA 12.

FIGURA 13. Finalmente o subnível $h^{-1}\left[0, \frac{1}{2}\right]$

2. H-COBORDISMO

Vamos agora passar ao estudo de uma das mais importantes e originais aplicações da Teoria de Morse, que é a teoria de *cobordismo*. Para ilustrar a relevância desta teoria, leve em consideração que o Teorema do H-Cobordismo, cujo enunciado e cuja prova serão apresentados nesta segunda parte do relatório, ofereceu um primeiro grande avanço na prova da famosa *Conjetura de Poincaré*.

Teorema 2.1 (Conjectura de Poincaré). *Seja M^n uma variedade fechada simplesmente conexa tal que $H_*(M) = H_*(S^n)$, então M é homeomorfa a esfera.*

Conjeturada em 1904 pelo matemático francês *Henri Poincaré*, foi originalmente concebida somente para dimensão 3. Em não muito tempo, a conjectura se tornou um dos grandes problemas matemáticos do milênio, que estimulou o desenvolvimento de inúmeras teorias matemáticas, e deu impulso ao crescimento e modernização de áreas clássicas da Matemática, incluindo a Topologia Algébrica e Diferencial, a Geometria Riemanniana e, mas recentemente, à teoria de equações diferenciais parciais em variedades.

Em 1961 Stephan Smale demonstrou a conjectura 2.1 para $n \geq 5$. Usando técnicas de Teoria de Morse desenvolveu uma teoria de cobordismo e demonstrou o Teorema do H-Cobordismo enunciado abaixo, ferramenta essencial para sua demonstração da Conjectura. Em seguida, iremos introduzir os conceitos fundamentais para a Teoria de Cobordismo e demonstrar o Teorema do H-Cobordismo e a Conjectura de Poincaré em dimensão maior ou igual 5. Nossa referência básica foi o texto clássico [9], complementado com referências mais modernas sobre o assunto, tais como [1] e [5].

2.1. Cobordismos: noções básicas. Vamos introduzir alguns conceitos essenciais para a teoria.

Definição 2.2. Dizemos que uma (W, V, V') é uma *tripla*, se W for uma variedade compacta, cujo bordo é formado por duas subvariedades V e V' .

Definição 2.3. Dizemos que $(W, V, V', \varphi, \varphi')$ é um *cobordismo* de M, N , variedades, se (W, V, V') for uma tripla, $\varphi: V \rightarrow M$ e $\varphi': V' \rightarrow N$ forem difeomorfismos.

Definição 2.4 (Categoria dos Cobordismos). Dizemos que dois cobordismos, $(W_0, V_0, V'_0, \varphi_0, \varphi'_0)$ e $(W_1, V_1, V'_1, \varphi_1, \varphi'_1)$, são *equivalentes* se existir um difeomorfismo $h: W_0 \rightarrow W_1$ tal que o diagrama abaixo comuta:

$$\begin{array}{ccc}
 V_i & \xrightarrow{h|_{V_i}} & V'_i \\
 \searrow \varphi_i & & \swarrow \varphi'_i \\
 & M_i &
 \end{array}$$

É possível demonstrar que dado um difeomorfismo $\psi: V'_0 \rightarrow V_1$ podemos dar uma estrutura diferenciável para $W_0 \cup_{\psi} W_1$ de maneira que a tupla $(W_0 \cup_{\psi} W_1, V_0, V'_1, \varphi_0, \varphi'_1)$ seja um cobordismo.

Observação 2.5. A noção de cobordismo permite definir uma nova categoria, cujos objetos são (classes de difeomorfismos de) variedades compactas sem bordo, e as flechas são (classes de equivalência de) cobordismos, de maneira simplificada podemos entender que existe uma flecha de M para N se estas variedades são cobordantes, e uma flecha é a escolha de um classe de cobordismo.

Podemos definir uma operação importante para cobordismos, chamada *composição*.

Exemplo 2.6. Sejam M e N variedades difeomorfas e $h: M \rightarrow N$ um difeomorfismo, então $(M \times [0, 1], M \times \{0\}, M \times \{1\}, i_0, h \circ i_1)$ é um cobordismo entre M e N onde i_0 e i_1 são as identificações naturais de $M \times \{0\}$ e $M \times \{1\}$ com M .

Dizemos que $(M \times [0, 1], M \times \{0\}, M \times \{1\}, i_0, h \circ i_1)$ é o *cobordismo trivial* entre M e N , dizemos também que $(M \times [0, 1], M \times \{0\}, M \times \{1\}, i_0, h \circ i_1)$ é um *cobordismo produto*.

Obviamente, duas variedades compactas são difeomorfas quando são variedades cobordantes num cobordismo trivial. O Teorema do H-Cobordismo fornece condições topológicas para quando um cobordismo é trivial; estamos prontos para dar o enunciado deste teorema.

Teorema 2.7 (Teorema do H-Cobordismo). *Seja uma tripla (W^n, V, V') tal que*

- (1) W, V, V' simplesmente conexas
- (2) $H_*(W, V) = 0$

(3) $n \geq 6$

Então W é difeomorfo ao cobordismo trivial $V \times [0, 1]$

A prova deste teorema é extremamente elaborada, e pela quantidade e profundidade de noções matemáticas envolvidas nos argumentos utilizados omitiremos algumas demonstrações mais técnicas. Daremos a seguir um passo a passo completo da prova. Antes disso, mostraremos como o Teorema de H-cobordismo é utilizado na prova da Conjetura de Poincaré em dimensão maior que 5.

2.2. Prova da Conjetura de Poincaré em dimensão alta.

Teorema 2.8 (Caracterização do disco suave). *Se W^n for uma variedade compacta simplesmente conexa de dimensão ≥ 6 tal que ∂W é simplesmente conexa. Então são equivalentes:*

- (1) W^n é difeomorfo a D^n .
- (2) W^n é homomorfo a D^n .
- (3) W é contrátil.
- (4) W tem homologia trivial.

Demonstração. Evidentemente $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 4$ logo basta demonstrar que $4 \Rightarrow 1$.

Seja D_0 um disco mergulhado em $\text{int } W$, então vamos provar que podemos aplicar o Teorema do H-Cobordismo para a tripla $(W \setminus \text{int } D_0, \partial D_0, \partial W)$.

De fato, tomando uma vizinhança tubular R_0 de ∂D_0 , aplicando o Teorema de Van Kampen para $W \setminus \text{int } D_0 \cup R_0$ e $\text{int } D_0$ obtemos que

$$W \setminus \text{int } D_0 \cup R_0 \simeq_h W \setminus \text{int } D_0$$

é simplesmente conexo.

Vamos verificar que $H_*((W \setminus \text{int } D_0, \partial D_0)) = 0$, com efeito, por existência temos que $H_*((W \setminus \text{int } D_0, \partial D_0)) \simeq H_*(W, D_0)$ E pela sequência exata do par:

$$\dots \rightarrow H_n(D_0) \xrightarrow{i_*} H_n(W) \xrightarrow{\pi_*} H_n(W, D_0) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(D_0) \rightarrow \dots$$

Temos que $H_*(W, D_0) = 0$.

Portanto podemos aplicar o Teorema do H-Cobordismo, assim $(W \setminus \text{int } D_0, \partial D_0, \partial W)$ é um cobordismo produto. De maneira que $(W^n, \emptyset, \partial W)$ é uma composição de $(D_0, \emptyset, \partial D_0)$ com o cobordismo produto $(W \setminus \text{int } D_0, \partial D_0, \partial W)$, concluindo assim que W^n é difeomorfo a D_0 . \square

Vamos agora demonstrar a conjectura de Poincaré para dimensão ≥ 6 .

Demonstração de 2.1. Seja D_0 um disco mergulhado em M , temos que

$$(2.1) \quad H_i(M \setminus \text{int } D_0) \simeq H^{n-i}(M \setminus \text{int } D_0, \partial D_0)$$

$$(2.2) \quad \simeq H^{n-i}(M, D_0)$$

$$(2.3) \quad \simeq \begin{cases} 0 & \text{se } i > 0 \\ \mathbb{Z} & \text{se } i = 0 \end{cases}$$

Onde a primeira igualdade se dá pela Dualidade de Poincaré, a segunda por exisção e a ultima pela sequencia exata de cohomologia.

Logo, podemos aplicar o resultado anterior da Carcterização dos n -discos suaves. Consequentemente $M = (M \setminus \text{int } D_0) \cup D_0$ é difeomorfa a uma união de duas copias de um n - disco, com o bordo identificado por um difeomorfismo. Uma variedade assim é dita uma *esfera twistada* e pode-se contruir um homeomorfismo explicito de uma esfera twistada a esfera euclideanacucluindo o teorema. \square

2.3. Descrevendo o passo a passo da prova do teorema de H-cobordismo.

A ideia central da prova do teorema de H-cobordismo é, dado uma tripla (W, V, V') satisfazendo as hipóteses do Teorema 2.7, construímos uma função de Morse $f: W \rightarrow [a, b]$ sem pontos críticos. A existência de uma função deste tipo implica a conclusão do Teorema de H-cobordismo, que pode ser deduzida imediatamente do Teorema 1.14, um dos resultados centrais da Teoria de Morse.

Teorema 2.9. *Se a tripla (W, V, V') admite uma função de Morse sem pontos críticos, então W é difomorfo ao cobordismo trivial $V \times [0, 1]$.* \square

A ideia para a construção de uma tal função é a de, inicialmente, considerar uma função de Morse arbitrária $f: W \rightarrow [a, b]$, e depois exibir um procedimento para modificar a função, eliminando sucessivamente todos

seus pontos críticos. Os vários passos deste processo de modificação da f são chamados de *cancelamento de pontos críticos*, termo remanescente do fato que pontos críticos são eliminadas *em pares*. Nessa seção apresentaremos os vários passos deste processo de cancelamento, e nas seções a seguir discutiremos a prova de cada cancelamento.

Começamos com a noção precisa de função de Morse em uma tripla.

Definição 2.10. Dizemos que $f: W \rightarrow [a, b]$ é uma função de Morse para a tripla (W, V, V') se:

- (1) $f^{-1}(a) = V$
- (2) $f^{-1}(b) = V'$
- (3) Todos os pontos críticos de f estão no interior de W e $f|_{\text{int } W}$ é de Morse.

A existência de funções de Morse de triplas como na definição acima pode ser deduzida utilizando o poderoso Teorema de Transversalidade de Thom para jatos (cf. [6]), resultado clássico da teoria de Topologia Diferencial. Tal resultado não apenas implica a existência de funções de Morse para triplas, mas prova também o resultado mais forte que o conjunto das funções de Morse para a tripla (W, V, V') é, na realidade, um conjunto *residual* na topologia C^∞ de Whitney no espaço das funções C^∞ em W .

Teorema 2.11. *Dada uma tripla (W, V, V') , existe uma função de Morse para esta tripla.* \square

Passamos agora a definir o número de Morse de uma tripla.

Definição 2.12. Denotamos por $\mu(W, V, V')$ a menor quantidade de pontos críticos de uma função de Morse para a tripla (W, V, V') . Dizemos que $\mu(W, V, V')$ é o *número de Morse* da tripla.

Pelo visto acima, cobordismos triviais são cobordismos com número de Morse igual a 0. O cobordismos não triviais mais simples são aqueles com número de Morse igual a 1:

Definição 2.13. Dizemos que uma tripla (W, V, V') é um *cobordismo elementar* se admite uma função de Morse com exatamente um ponto crítico.

Não é difícil provar que cada cobordismo pode ser decomposto como composição decobordismos elementares.

Lema 2.14. *Todo cobordismo pode ser obtido como a composição de um número finito de cobordismos elementares.*

Demonstração. Dada uma função de Morse f e dados dois pontos críticos $p, q \in W$, é possível perturbar f numa vizinhança de p e numa vizinhança de q de forma tal que a nova função continue de Morse, tenha os mesmos pontos críticos da f , e tome valores distintos em p e q . Já que uma função de Morse em uma triade (W, V, V') admite somente um número finito de pontos críticos, pois W é compacto, o processo pode ser repetido indutivamente, obtendo uma função de Morse que toma valores distintos $\min f < c_1 < \dots < c_k < \max f$ em seus pontos críticos. Escolhendo valores regulares $d_i \in]c_i, c_{i+1}[$, $i = 1, \dots, k-1$, da f , temos que o cobordismo (W, V, V') é dado pela composição dos cobordismos elementares:

$$\begin{aligned} & (f^{-1}([\min f, c_1]), V, f^{-1}(d_1)), (f^{-1}([d_1, d_2])f^{-1}(d_1), f^{-1}(d_2)), \\ & \dots, (f^{-1}([d_{k-2}, d_{k-1}])f^{-1}(d_{k-2}), f^{-1}(d_{k-1})), \\ & (f^{-1}([f^{-1}(d_{k-1}), \max f]), f^{-1}(d_{k-1}, V')). \quad \square \end{aligned}$$

Dada uma métrica riemanniana em W podemos associar a uma função de Morse $f: W \rightarrow \mathbb{R}$ um campo de vetores gradiente. Mais geralmente, sem a necessidade de introduzir uma métrica Riemanniana em W , podemos considerar campos vetoriais tais que a função f é crescente ao longo de suas linhas de fluxo. Tais campos são chamados *tipo-gradiente* (gradient-like), e a definição rigorosa é a seguinte.

Definição 2.15. Seja f uma função de Morse para a tripla (W, V, V') , digamos que um campo de vetores ξ é um *campo de vetores tipo-gradiente* para f se:

- (1) $\xi(f) > 0$ fora dos pontos críticos de f .
- (2) Dado um ponto crítico p de f , existe um sistema de coordenadas ao redor de p , $(x, y) = (x_1, \dots, x_\lambda, y_1, \dots, y_{n-\lambda})$, tal que f e ξ se

escrevem nessas coordenadas respectivamente como:

$$f = f(p) - \|x\|^2 + \|y\|^2$$

e

$$\xi = (-x_1, \dots, -x_\lambda, y_1, \dots, y_{n-\lambda}).$$

Teorema 2.16. *Toda função de Morse na tripla (W, V, V') admite um campo de vetores tipo-gradiente.*

Definição 2.17. A tripla (W, V, V') é dita um *cobordismo produto* se é difeomorfo a tripla $(V \times [0, 1], V \times 0, V \times 1)$

Teorema 2.18. *Se o número de Morse da tripla (W, V, V') for zero então (W, V, V') é um cobordismo produto.*

Demonstração. Seja $f: W \rightarrow [0, 1]$ função de Morse sem nenhum ponto crítico. Pelo teorema 2.16 existe um campo de vetores tipo gradiente para f , ξ , podemos assumir que $\xi(f) = 1$, caso contrário $\xi/\xi(f)$ é um outro campo de vetores tipo-gradiente.

Seja $\phi: (a, b) \rightarrow W$ uma curva integral qualquer para o campo de vetores ξ . Temos que $1 = \xi(f) = (f \circ \phi)'$, o que implica que $f \circ \phi(t) = t + c$, fazendo uma mudança de parametro se necessario, podemos assumir que $f(\phi(t)) = t$.

Como W é compacto temos que qualquer curva integral de ξ pode ser estendida para $[0, 1]$, assim para todo $y \in W$ existe uma única curva integral maximal de ξ , $\phi_y: [0, 1] \rightarrow W$, que passa por y e satisfaz $f(\phi_y(t)) = t$. Sabemos que pelo Teorema de Existencia e Unicidade para EDO's que ϕ_y depende suavement de y . Portanto

$$\begin{aligned} h: V \times [0, 1] &\rightarrow W \\ (y, t) &\mapsto \phi_y(t) \end{aligned}$$

é um difeomorfismo com inversa $h^{-1}(y) = (\phi_y(0), f(y))$. \square

Como observamos no Lema 2.14, todo cobordismo pode ser escrito como composição de cobordismos com número de Morse 1. Tendo em vista este fato, a seguir estudaremos cobordismos com número de Morse igual a 1.

Seja (W, V, V') uma tripla com uma função de Morse $f: W \rightarrow \mathbb{R}$ e ξ um campo de vetores tipo-gradiente para f , tome $p \in W$ ponto crítico e $a, b \in \mathbb{R}$ tal que $a < f(p) \doteq c < b$ e tal que o único valor crítico de f em $[a, b]$ é c .

ξ é um campo de vetores tipo-gradiente para f logo existe um sistema de coordenadas $\psi: B_{2\varepsilon}^n(0) \rightarrow U(p)$ tal que $f \circ \psi(x, y) = c - \|x\|^2 + \|y\|^2$ e em $U(p)$ $\xi_{\psi(x,y)}$ se escreve em coordenadas como $(-x, y)$, onde $(x, y) \in \mathbb{R}^\lambda \times \mathbb{R}^{n-\lambda}$ com λ o índice de f em p .

Defina $V_s \doteq f^{-1}(c + \text{sgn}(s)s^2)$, podemos assumir sem perda de generalidade que $4\varepsilon^2 < \min\{|c - a|, |c - b|\}$.

Estabelecida essas notações vamos definir conceitos importantes para o desenvolvimento da teoria.

Definição 2.19 (O mergulho característico). Denotemos por $\phi: S^{\lambda-1} \times B^{n-\lambda} \rightarrow V_{-\varepsilon}$ o mergulho

$$(u, \theta v) \mapsto \psi(\varepsilon u \cosh \theta, \varepsilon v \sinh \theta)$$

com $\theta \in [0, 1)$ e $v \in S^{n-\lambda}$.

Como em $[a, c - \varepsilon^2]$ não há nenhum valor crítico de f e $f^{-1}[a, c - \varepsilon^2]$ é um compacto, então temos que toda curva integral maximal de ξ vai de $f^{-1}(a)$ a $V_{-\varepsilon}$. Desta forma podemos definir $\phi_L: S^{\lambda-1} \times B^{n-\lambda} \rightarrow f^{-1}(a)$ de maneira que $\phi_L(u, \theta v)$ é o transladado de $\phi(u, \theta v)$ via o fluxo de ξ . Diremos que ϕ_L o *mergulho característico*.

Podemos fazer uma definição analoga para $\phi_R: B^\lambda \times S^{n-\lambda-1} \rightarrow f^{-1}(b)$.

Definição 2.20. Definimos como a *esfera a esquerda de p em $f^{-1}(a)$* , denotada por S_L , a intersecção da variedade estável de ξ em p com $f^{-1}(a)$. Da mesma forma o *disco a esquerda de p*, denotado por D_L , será o conjunto $W^s(\xi, p) \cap f^{-1}[a, c]$. Analogamente podemos definir a *esfera e o disco a direita de p* usando a variedade instável de ξ em p .

Observação 2.21. Observe que S_L e S_R são de fato esferas mergulhadas, pois coincidem com $\phi_L(S^{\lambda-1} \times \{0\})$ e $\phi_R(S^{\lambda-1} \times \{0\})$ respectivamente.

Já D_L e D_R são discos imersos em W , cujas fronteiras são S_L e S_R respectivamente.

Os resultados abaixo nos dirão que nenhum cobordismo elementar poderá ser um cobordismo produto e que, portanto, um cobordismo elementar tem número de Morse 1. Além disso teremos que o índice do ponto crítico de qualquer função de Morse (que tem somente um ponto crítico) é independente da função de Morse. Desta maneira temos que uma noção de índice para um cobordismo elementar. Com efeito, definimos o índice de um cobordismo elementar como o índice do ponto crítico de uma função de Morse com somente um ponto crítico.

Definição 2.22 (Cirurgia). Dada uma variedade V de dimensão $n - 1$ e um mergulho $\phi: S^{\lambda-1} \times B^{n-\lambda} \rightarrow V$. Seja $\chi(V, \phi)$ o quociente

$$(V \setminus \phi(S^{\lambda-1} \times \{0\})) \sqcup (B^\lambda \times S^{n-\lambda-1}) / \sim$$

onde $\phi(u, \theta v) \sim (\theta u, v)$ para cada $(u, v) \in S^{\lambda-1} \times S^{n-\lambda-1}$ e $\theta \in (0, 1)$. Dizemos que V' é obtido por *cirurgia de tipo* $(\lambda, n - \lambda)$ se for uma variedade difeomorfa a $\chi(V, \phi)$.

A observação importante para entender cirurgia é observar que

$$\partial(S^n \times \overline{B}^m) = S^n \times S^{m-1} = \partial(\overline{B}^{n+1} \times S^{m-1})$$

Logo se em uma variedade tivermos mergulhado uma subvariedade do tipo $S^n \times \overline{B}^m$ podemos retirala e adicionar $\overline{B}^{n+1} \times S^{m-1}$. Esse processo nos daria uma variedade topológica homeomorfa a descrita acima, porém teria cantos, para evitar o estudo da suavização de variedades com cantos podemos descrever o processo de cirurgia como o fizemos.

Teorema 2.23. *Seja uma variedade V' obtida de V fazendo cirurgia de tipo $(\lambda, n - \lambda)$ então existe um cobordismo elementar (W, V, V') de índice λ .*

Demonstração. Veja [9] □

Denotamos o cobordismo acima entre V e $\chi(V, \phi)$ por $\omega(V, \phi)$

O teorema acima nos diz que ao fazer cirurgia em uma variedade V , obtemos um cobordismo elementar entre V e $\chi(V, \phi)$. O próximo teorema nos diz que todos os cobordismos elementares são desta forma.

Teorema 2.24. *Seja (W, V, V') um cobordismo elementar munido de uma função de Morse com somente um ponto crítico, e $\phi_L: S^{\lambda-1} \times B^{n-\lambda} \rightarrow V$*

um mergulho característico. Então $(\omega(V, \phi_L), V, \chi(V, \phi_L))$ é difeomorfo a (W, V, V') .

Demonstração. Veja [9] □

Agora enunciaremos um resultado muito similar a 1.15 só que agora com esta nova linguagem de sistemas dinâmicos do fluxo de um campo de vetores tipo-gradiente para uma função de Morse em uma tripla.

Teorema 2.25. *Seja (W, V, V') um cobordismo elementar com uma função de Morse, $f: W \rightarrow \mathbb{R}$, com um único ponto crítico, $p \in W$ de índice λ . Seja D_L o disco a esquerda de p associado a um campo de vetores tipo-gradiente para f . Então $V \cup D_L$ é um retrato por deformação de W .*

Demonstração. A demonstração deste fato é muito parecida com a de 1.15, para mais detalhes ver [9]. □

Corolário 2.26. *Nas condições acima $H_*(W, V)$ é isomorfo a \mathbb{Z} em dimensão λ e a zero em todas as outras dimensões. Um gerador de $H_\lambda(W, V)$ é dado pela classe de D_L .*

Demonstração. Como W tem o mesmo tipo de homotopia de $V \cup D_L$ temos que

$$H_*(W, V) \simeq H_*(V \cup D_L, V)$$

Por exisão (cf. [7] pag. 119) temos que

$$H_*(V \cup D_L, V) \simeq H_*(D_L, S_L)$$

que tem a homologia desejada, cf. [7] pag. 236. □

2.4. Funções de Morse auto-indexadas. Nesta seção vamos estudar a decomposição de um cobordismo em cobordismos mais simples. Já vimos no Lema 2.14 que todo cobordismo pode ser expressado como composição de cobordismos elementares, e aqui queremos determinar uma composição um pouco diferente, com uma condição adicional.

Mais precisamente, queremos provar que, dada uma tripla (W, V, V') , podemos decompô-la em uma composição de cobordismos elementares *com índice não decrescente*. Lembrando que a decomposição em cobordismos elementares foi obtida utilizando os subníveis de uma função de Morse, isto

é um indicativo que para obter o resultado desejado temos que determinar uma função de Morse cujos valores nos pontos críticos estejam relacionados ao índice de Morse. Damos então a seguinte definição:

Definição 2.27. Dizemos que uma função de Morse na tripla (W^n, V, V') é *auto-indexada* se:

- (1) $f(V) = -\frac{1}{2}$
- (2) $f(V') = n + \frac{1}{2}$
- (3) $f(c) = i(c)$ para todo ponto crítico c de f .

Provar que, para uma tripla (W, V, V') , funções de Morse auto-indexadas existem é equivalente a provar a existência de uma decomposição de (W, V, V') da forma:

$$W = U_0 U_1 \cdots U_n$$

onde, para todo k , U_k é um cobordismo que admita uma função de Morse com apenas um nível crítico, e tal que todos seus pontos críticos tenham índice de Morse igual a k .

A prova da existência de uma decomposição como acima é obtida utilizando um procedimento de *rearranjar* cobordismos elementares. Dizemos que a composição de dois cobordismos elementares cc' pode ser *rearranjada* se existirem dois cobordismos d e d' tal que o índice de c é igual ao índice de d' , o índice de c' é igual ao índice de d , e tal que cc' é equivalente a dd' . Nesse caso dd' é um *rearranjo* de cc' .

O próximo resultado fornece uma condição suficiente para o rearranjo de cobordismos elementares.

Se (W, V_0, V_1) é uma tripla que representa a composição de cobordismos elementares cc' , existe uma função de Morse $f: W \rightarrow \mathbb{R}$ tal que f tem dois pontos críticos $p, p' \in W$ com $f(p) < \frac{1}{2} < f(p')$, e tal que, definindo $V \doteq f^{-1}(2)$, $(f^{-1}[0, 1/2], V_0, V)$ é uma tripla para c e $(f^{-1}[1/2, 1], V, V_1)$ é uma tripla para c' . Fixado um campo de tipo gradiente ξ para f , lembramos que $S_L(p)$ e $S_R(p')$ denotam as esferas à esquerda e à direita dos pontos p e p' respectivamente.

Proposição 2.28. *Dada uma composição de cobordismos elementares cc' , com fixada função de Morse f e campo de tipo gradiente ξ , existe um rearranjo dd' de cc' se $S_L(p') \cap S_R(p) = \emptyset$.*

Demonstração. Veja [13]. □

Temos agora um resultado que garante a possibilidade de perturbar o campo tipo-gradiente de forma que a condição no enunciado da Proposição 2.28 seja satisfeita sempre que o índice de Morse de p seja maior ou igual ao índice de Morse de p' . Lembramos que a definição das esferas S_L e S_R depende da escolha de um campo tipo gradiente para a função de Morse da tripla.

Proposição 2.29. *Seja cc' a composição de cobordismos elementares, com função de Morse f , pontos críticos p e p' e ξ campo de tipo gradiente para f . Se o índice de Morse de p é maior ou igual ao índice de Morse de p' , então existem perturbações arbitrariamente pequenas do campo ξ que torne as interseções das esferas $S_L(p')$ e $S_R(p) = \emptyset$.*

Para a demonstração deste resultado precisaremos de um lema geométrico sobre subvariedades. Vamos enuncia-lo a seguir:

Lema 2.30. *Suponha que M^m e N^n são subvariedades de uma variedade V^ν . Se M tem um vizinhança tubular em V , e $m + n < \nu$, então existe um difeomorfismo $h: V \rightarrow V$ isotópico a identidade, tal que $h(M) \cap N = \emptyset$*

Vamos fixar notação: Podemos supor que $f(p) < 1/2 < f(p')$, defina $V = f^{-1}(1/2)$ e tome as esferas a direita e a esquerda, S_R e S_L , de p e p' , respectivamente, em V .

Demonstração de 2.29. Não é difícil ver que a esfera S_R tem uma vizinhança tubular em V , então o Lema anterior nos dá um difeomorfismo $h: V \rightarrow V$ isotópico a identidade, no qual $h(S_R) \cap S_L = \emptyset$. Vamos usar a isotopia para alterar ξ da seguinte forma.

Seja \mathcal{V} uma vizinhança qualquer de V . Tome $a < \frac{1}{2}$ de maneira que $f^{-1}[a, 1/2] \subset \mathcal{V}$. O fluxo de $\tilde{\xi} = \xi/\xi(f)$ determina um difeomorfismo

$$\phi: [a, 1/2] \times V \rightarrow f^{-1}[a, 1/2]$$

com as propriedades que $f(\phi(t, q)) = t$ e $\phi(1/2, q) = q$. Defina agora um difeomorfismo

$$H: [a, 1/2] \times V \rightarrow [a, 1/2] \times V$$

$$(t, q) \mapsto (t, h_t(q))$$

onde $h_t(q)$ é a isotopia mencionada acima, ajustada de maneira que para $t \in [a, a + \varepsilon]$, $h_t(q) = q$ e para $t \in [\frac{1}{2} - \varepsilon, \frac{1}{2}]$, $h_t(q) = h(q)$. É fácil ver que $\xi' \doteq (\phi \circ H \circ \phi^{-1})_* \tilde{\xi}$ é um campo de vetores suave, que coincide com $\tilde{\xi}$ em uma vizinhança de $f^{-1}(a) \cup f^{-1}(1/2)$ e satisfaz $\xi'(f) = 1$. Desta maneira podemos estender o campo $\xi(f)\xi'$, a um campo de vetores, $\bar{\xi}$, em W , de maneira que coincida com ξ em $W \setminus f^{-1}[a, 1/2]$.

Observe agora que as curvas integrais de $\bar{\xi}$ são da forma $\phi(t, h_t(q))$ entre $\phi(a, q) \in f^{-1}(a)$ e $\phi(1/2, h(q)) = h(q) \in f^{-1}(1/2)$. Portanto temos que a esfera a direita a p em $f^{-1}(a)$ (em relação a ξ), $\phi(\{a\} \times S_R)$, é levada a $h(S_R)$.

Logo $h(S_R)$ é a esfera a direita a p em V com relação a $\bar{\xi}$. Agora observe que a esfera a esquerda a p' em relação a $\bar{\xi}$ continua a mesma. Desta maneira, temos que a intersecção das esferas a esquerda e a direita de p e q em relação a $\bar{\xi}$ é

$$\bar{S}_R \cap \bar{S}_L = h(S_R) \cap S_L = \emptyset$$

como queríamos demonstrar. \square

Tendo os resultados das Proposições 2.28 e 2.29, é fácil agora provar o seguinte:

Teorema 2.31. *Dada um tripla (W, V, V') podemos expressá-la como uma composição de cobordismos $W = U_0 U_1, \dots, U_n$, onde U_k admite uma função de Morse com um nível crítico e tal que todos seus pontos críticos tenham índice k .* \square

Assumiremos de aqui em diante que, quando necessário, todas as funções de Morse sejam auto-indexadas.

2.5. Campos de Vetores Morse-Smale. Nesta seção falaremos sobre a intersecção da Teoria de Morse com uma outra grande area na Matemática,

a de Sistemas Dinâmicos. Como referência para esta seção e para mais informações indicamos o livro [12].

Lembramos que dado um campo vetorial X numa variedade M , e dada uma *singularidade* p de X , i.e., um ponto tal que $X_p = 0$, então p é dita hiperbólica se o espaço tangente $T_p M$ se escreve como soma direta $T_p M^+ \oplus T_p M^-$, onde $T_p M^+$ e $T_p M^-$ são invariantes por $dX(p)$ e tais que $dX(p)$ é uma contração em $T_p M^-$ e uma expansão em $T_p M^+$. Lembramos que um operador linear L de um espaço vetorial V de dimensão finita é expansivo (resp., contrativo) se o módulo da parte real de todos os autovalores de L é menor (resp., maior) que 1. Uma órbita periódica de X é dita hiperbólica se qualquer um de seus pontos é um ponto fixo hiperbólico da transformação de Poincaré, veja [12, Capítulo 3] para detalhes.

Definição 2.32. Dizemos que um campo de vetores completo X em uma variedade M é dito de *Morse-Smale* se

- (1) X tem um número finito de elementos críticos (singularidades e órbitas fechadas), e todos são hiperbólicos.
- (2) Se σ_1, σ_2 são elementos críticos (singularidades ou órbitas fechadas) de X , então

$$W^s(\sigma_1) \pitchfork W^u(\sigma_2)$$

- (3) O conjunto dos *pontos não-errantes* de X coincide com o conjunto das singularidades de X .

Lembramos que um ponto $p \in M$ é não errante para o campo vetorial completo X se, dada uma qualquer vizinhança V de p , existe uma sequência $(t_n)_n$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} |t_n| = +\infty$ e tal que, denotando com ϕ_t of fluxo de X , $\phi_{t_n}(V) \cap V \neq \emptyset$ para todo n .

Uma das principais aplicações do Teorema de Transversalidade em Sistemas Dinâmicos é o Teorema de Kupka–Smale, que estabelece a *genericidade* da condição Morse–Smale para campos vetoriais. Dada uma variedade compacta M e um inteiro positivo k , denotamos com $\mathfrak{X}^k(M)$ o espaço de todos os campos vetoriais de classe C^k na variedade M , munido da topologia C^k . Lembramos que um subconjunto de um espaço topológico é dito *residual* se contem a interseção de abertos densos.

Teorema 2.33 (Teorema de Kupka–Smale). *Para todo $k \geq 2$, o conjunto de campos vetoriais de Morse–Smale em $\mathfrak{X}^k(M)$ é residual.*

Demonstração. Veja por exemplo [12, Teorema 3.12]. □

Se $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ for uma função suave com M compacta e X for um campo de vetores tipo-gradiente, as condições para X ser Morse-Smale se reduzem a:

- (A) f é uma função de Morse
- (B) Se p e q forem pontos críticos de f e $V = f^{-1}(c)$ for um nível regular com $f(p) < c < f(q)$, então as esferas a esquerda e a direita de q e p em V , $S_L(q)$ e $S_R(p)$, são transversais.

Para ver que a propriedade (B) é equivalente à propriedade (2) da definição de campos de Morse-Smale no caso de campo pseudo-gradientes, basta observar que, para todo $x \in S_L(q) \cap S_R(p)$, o espaço $T_x W^u(p) \cap T_x W^s(q)$ é transversal a $T_x V$.

Podemos então definir a noção de dupla de Morse–Smale.

Definição 2.34. Seja $f: W \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de Morse, e ξ um campo de vetores tipo-gradiente para f que seja Morse-Smale, ou seja, ξ satisfaz as duas condições acima. Então dizemos que o par ordenado (f, ξ) é uma *dupla de Morse-Smale*.

Com o teorema de Kupka-Smale é possível demonstrar que dada uma função de Morse, f , cujos pontos críticos tem valores diferentes, o conjunto dos campos de vetores Morse-Smale tipo-gradientes para f é um subconjunto residual no conjunto dos campos tipo-gradiente (c.f.[1]).

Com técnicas mais elementares, podemos demonstrar que, toda função de Morse f numa variedade (possivelmente com bordo) M admite um campo de vetores tipo gradiente que satisfaz a condição. Mais explicitamente:

Teorema 2.35. *Seja M uma variedade compacta com bordo, e $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de Morse em M cujos valores críticos são distintos³. Dado um campo de tipo gradiente ξ para f , transversal a ∂M , e dada uma arbitrária*

³i.e., $f|_{\text{Crit } f}$ é injetora

vizinhança Ω de $\text{Crit}(f)$, existe um campo ξ' de tipo gradiente para f que satisfaz a condição de Morse–Smale, e que coincide com ξ fora de Ω . Tal campo ξ' pode ser escolhido arbitrariamente C^1 -próximo a ξ .

Observamos que toda função de Morse $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ admite perturbações arbitrariamente próximas com funções $\tilde{f}: M \rightarrow \mathbb{R}$ de Morse cujos valores críticos sejam distintos. Para ver isto, basta perturbar a f somando uma função h que tenha norma C^2 -pequena, e constante perto de cada ponto crítico da f .

2.6. O primeiro teorema de cancelamento. Vamos agora demonstrar o primeiro teorema importante para nossa demonstração.

Teorema 2.36. *Seja (W, V_0, V_1) uma tripla com uma dupla (f, ξ) de Morse–Smale em exatamente dois pontos críticos c, c' de índices λ e $\lambda + 1$, tal que $f(c) < f(c')$. Então se $S_L \cap S_R$ consistir de somente um ponto então W é um cobordismo produto. E mais, temos que o campo de vetores tipo-gradiente ξ pode ser modificado em uma vizinhança arbitrária da única linha de fluxo de c a c' , de maneira que este novo campo de vetores seja um tipo-gradiente de uma função $f': W \rightarrow \mathbb{R}$ de Morse sem pontos críticos, que coincide com f em uma vizinhança de $V \cup V'$.*

Demonstração. Denotamos com T a única linha de fluxo de ξ de c a c' . Vamos inicialmente provar o resultado assumindo a seguinte:

Hipótese adicional: existe uma vizinhança U_T da trajetória T , e um sistema de coordenadas $g: U_T \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que:

- (1) $g(c) = (0, \dots, 0)$ e $g(c') = (1, 0, \dots, 0)$
- (2) $g_*\xi(q) = \eta(x) = (\nu(x_1), -x_2, \dots, -x_\lambda, -x_{\lambda+1}, x_{\lambda+2}, \dots, x_n)$, onde $g(q) = x$.
- (3) $\nu(x_1)$ é uma função suave, positiva em $(0, 1)$, zero no bordo do intervalo e negativa em todo outro ponto. Além disso $|\dot{\nu}(t)| = 1$ para t em uma vizinhança de 0 e numa vizinhança de 1.

Afirmção 4. Dada uma vizinhança aberta de U de T , podemos encontrar uma vizinhança menor $U' \subset U$ de T de maneira que nenhuma trajetória passe por U' , saia para fora de U , e retorne a U'

Demonstração. Suponha por absurdo que a afirmação é falsa, então encontramos partes de trajetórias $T_1, T_2, \dots, T_k, \dots$ tal que, para todo k , T_k começa em r_k passa por um ponto $s_k \in W \setminus U$ e depois vai pra t_k , de maneira que $(r_k)_k$ e $(t_k)_k$ tendem a algum ponto de T quando $k \rightarrow \infty$. Como $W \setminus U$ é um compacto então a menos de subsequencia podemos assumir que $(s_k)_k$ é convergente. Seja $s \doteq \lim s_k$, temos que a curva integral $\phi(t, s)$ de ξ que passa por s deve ou vir de V_0 ou ir para V_1 , caso contrario seria uma segunda trajetória unindo c e c' . Sem perda de generalidade podemos assumir que $\phi(t, s)$ vem de V_0 .

Pela dependência continua dos parametros iniciais, temos que em uma vizinhança de s , $B(s)$, todas as curvas integrais vem de V_0 . Assim definimos $T_{s'}$ como a trajetória que parte de V_0 e termina em $s' \in B(s)$. Observe que $T_{s'}$ é um compacto, desta maneira temos que, ao escolher uma distancia qualquer em W , a função $d: B(s) \rightarrow \mathbb{R}$ com $d(s') = d(T, T_{s'})$ está bem definida e é continua. Logo, como $d(s) > 0$, em uma vizinhança de s , d é maior que uma constante positiva $\alpha > 0$, desta forma para k grande temos que

$$\alpha < d(s_k) = \inf\{d(x, y) : x \in T, y \in T_{s_k}\} \leq \inf\{d(r_k, x) : x \in T\} \rightarrow 0$$

Absurdo. □

Seja U uma vizinhança de T cujo fecho está contido em U_T , e seja U' uma vizinhança de T como a da afirmação anterior.

Afirmação 5. É possível alterar ξ em um subconjunto compacto de U' , de maneira que o novo campo de vetores ξ' não tem singularidades, e é tal que toda curva integral de ξ' que passa por um ponto de U em algum instante t_* , deve ter estado fora de U em algum instante $t' < t_*$ e sairá de U novamente em algum tempo $t'' > t_*$.

Demonstração. Tome $\eta'(x) = (\nu'(x_1, \|(x_2, \dots, x_n)\|), -x_2, \dots, x_n)$ Onde ν' satisfaz as propriedades:

- (1) $\nu'(x_1, \|x^1\|) = v(x_1)$ fora de uma vizinhança compacta de $g(T)$ em $g(U')$
- (2) $\nu'(x_1, 0) < 0$ para todo x_1 .

Com $x^1 \doteq (x_2, \dots, x_n)$.

Observe que ξ' é um campo de vetores sem singularidades em W , pois se $x_2 = \dots = x_n = 0$ então $x^1 = 0 \implies \xi'(x) = (\nu'(x_1, 0), 0, 0, \dots, 0) \neq 0$

Assim temos que as curvas integrais de ξ' em U_T satisfazem o sistema de EDOs:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = \nu'(x_1, \|x^1\|) \\ \frac{dx_2}{dt} = -x_2 \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} = x_n \end{cases}$$

Seja $x(t)$ uma curva integral com condição inicial $(x_1(0), \dots, x_n(0))$. Vamos provar a afirmação para $t > 0$. Para isso, separamos a demonstração em dois casos:

- $x_k(0) = 0$ para todo $k > \lambda + 1$,
- existe $k > \lambda + 1$ tal que $x_k(0) \neq 0$.

No primeiro caso temos que $x^1(t) = (x_2(0)e^{-t}, \dots, x_{\lambda+1}(0)e^{-t}, 0, \dots, 0)$, logo $\|x^1(t)\|$ decresce exponencialmente quando $t \rightarrow +\infty$. Suponhamos por absurdo que $x(t) \in g(U)$ para todo $t > 0$, então como $\nu'(x_1, \|x^1\|)$ é negativa para $x^1 = 0$, por continuidade, temos que existe $\delta > 0$ tal que $\nu'(x_1, \|x^1\|)$ é menor que uma constante negativa, β , no conjunto compacto $K_\delta \doteq \{x \in g(\bar{U}) : \|x^1\| \leq \delta\}$. Como $\|x^1(t)\|$ decresce exponencialmente, temos que eventualmente $\|x^1(t)\| \leq \delta$. Portanto daí em diante

$$\frac{dx_1}{dt} \leq \beta < 0$$

e assim $x(t)$ deverá eventualmente sair do conjunto limitado $g(U)$.

Para o segundo caso basta observar que se existe $k > \lambda + 1$ tal que $x_k(0) \neq 0$, então $\|x(t)\| \geq |x_k(t)| = |x_k(0)e^t| \rightarrow \infty$, logo $x(t)$ eventualmente escapa o conjunto limitado $g(U)$.

Para $t < 0$ a demonstração é análoga. □

Afirmção 6. Toda linha integral de ξ' vai de V a V' .

Demonstração. Se uma curva integral de ξ' passa por U' , pela Afirmação 5 eventualmente a curva terá que sair de U . Ao deixar U' , $\xi' = \xi$ assim a curva integral coincide com uma linha de fluxo de ξ . Pela afirmação 4 a curva integral não retornará a U' e portanto deve ir a V_1 . Um argumento analgo demonstra que a curva deve ter vindo de V_0 .

Se uma curva integral de ξ' não passa por U' , então esta é uma curva integral de ξ e portanto vai de V_0 para V_1 . \square

Afirmção 7. De maneira natural, o fluxo de ξ' determina um difeomorfismo $\phi: ([0, 1] \times V, \{0\} \times V, \{1\} \times V) \rightarrow (W, V, V')$

A demonstração desta afirmação é muito parecida com a de 2.18, será omitida.

Afirmção 8. Existe uma função de Morse $g: W \rightarrow \mathbb{R}$ sem pontos críticos, tal que o campo ξ' é um tipo-gradiente para g . Além disso temos que g coincide com f em uma vizinhança de ∂W .

Demonstração. Dada a última afirmação basta encontrar uma função de Morse $h: [0, 1] \times V_0 \rightarrow [0, 1]$ tal que $\frac{\partial h}{\partial t} > 0$, e h coincide com $f_1 = f \circ \phi$ em uma vizinhança de $\partial[0, 1] \times V_0$. Temos que existe $\delta > 0$ tal que para todo $q \in V_0$, $\frac{\partial f_1}{\partial t}(t, q) > 0$ se $t < \delta$ ou $1 - \delta < t$.

Seja $\lambda: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ uma função suave tal que $\lambda|_{[\delta, 1-\delta]} = 0$ e, além disso, $\lambda|_{[0, \epsilon] \cup [1-\epsilon, 1]} = 1$.

Defina a função auxiliar

$$k(q) \doteq \left[1 - \int_0^1 \lambda(t) \frac{\partial f_1}{\partial t}(t, q) dt \right] \left(\int_0^1 (1 - \lambda(t)) dt \right)^{-1}$$

e por fim vamos definir

$$h(s, q) \doteq \int_0^s \left[\lambda(t) \frac{\partial f_1}{\partial t} + (1 - \lambda(t)) k(q) \right] dt$$

E h é a função desejada. \square

Assim, concluímos a prova do Teorema sob a hipótese adicional da página 64.

Para completar a prova, basta mostrar que podemos sempre nos reconduzir ao caso em que a hipótese adicional é satisfeita. É possível, de fato,

provar que se S_R e S_L tem uma única intersecção transversal, é sempre possível modificar o campo tipo gradiente ξ de forma que a hipótese adicional é satisfeita.

Omitiremos os detalhes da prova desta afirmação, que são bastante técnicos, e podem ser encontrados em [9, § 5]. \square

2.7. Segundo Teorema de Cancelamento. O teorema da ultima seção é muito importante para a demonstração do Teorema do H-Cobordismo. Porém as hipóteses do teorema anterior são muito restritivas e por isso precisamos de um resultado mais fino.

Na hipótese do Teorema 2.36 temos que a intersecção das esferas, $S_R \cap S_L$, precisa ser um conjunto unitário. Neste novo teorema substituímos esta hipótese com uma mais geral: pediremos que o número de intersecção $S_R * S_L$ seja igual a ± 1 .

Teorema 2.37. *Suponha (W^n, V, V') uma tripla tal que W, V, V' são simplesmente conexas, seja (f, ξ) uma dupla de Morse-Smale com exatamente dois pontos críticos de índice consecutivos $\lambda, \lambda + 1$. Se $3 \leq \lambda \leq n - 3$ e $S_L \cap S'_R$ tem número de intersecção ± 1 , então W é um cobordismo produto.*

A demonstração deste teorema é delicada e muito técnica, é essencialmente demonstrada com um Teorema de Whitney e usando o teorema da seção anterior. Neste Teorema de Whitney que as condições no grupo fundamental e na dimensão de W são introduzidos. Para mais detalhes ver [9]

2.8. Homologia de Morse. Nesta seção vamos introduzir uma das ferramentas essenciais utilizadas na demonstração do Teorema do H-Cobordismo.

Vamos definir uma nova homologia, que chamaremos de *Homologia de Morse* associada a um cobordismo e uma dupla de Morse-Smale (f, ξ) .

Descreveremos duas abordagens distintas à homologia de Morse, equivalentes, e cada abordagem nos trará visões diferentes do mesmo fenômeno. A primeira abordagem, que chamaremos *homologia dos pontos críticos*, utiliza um complexo de cadeias determinados pelos pontos críticos da f ,

e os operadores de bordo definidos usando o número de interseção de esferas S_L e S_R , veja Definição 2.20. A segunda abordagem utiliza funções auto-indexadas f , e a homologia relativa dos subníveis dessas funções.

O resultado principal (Teorema 2.40) é que a homologia de qualquer um desses complexos é isomorfa à homologia singular da M . Omitiremos os detalhes da prova deste importante resultado, que podem ser encontrados na referência [1].

Vamos fixar uma tripla (W, V, V') e uma dupla de Morse-Smale (f, ξ) para (W, V, V') .

2.8.1. *Homologia dos Pontos Críticos.* Seja $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ definimos

$$C_k \doteq \left\{ \sum_{c \in \text{Crit}_k(f)} a_c c : a_c \in \mathbb{Z} \right\}$$

o \mathbb{Z} -módulo livre com os pontos crítico de índice k como geradores.

Definimos agora a aplicação *bordo*:

$$(2.4) \quad \partial_{k+1} : C_{k+1} \longrightarrow C_k$$

de maneira que se $c \in \text{Crit}_k(f)$,

$$\partial_k(c) = \sum_{d \in \text{Crit}_{k-1}(f)} (S_R(d) * S_L(c))d,$$

onde $S_R(d) * S_L(c)$ denota o número de interseção das esferas $S_R(d)$ e $S_L(c)$ (veja Definição 2.20). A (2.4) define univocamente um homomorfismo de grupos entre C_{k+1} e C_k . Note que a hipótese de transversalidade nos diz que o $S_R(d) \cap S_L(c)$ consiste de um número finito de pontos, e o coeficiente $S_R(d) * S_L(c)$ é uma *contagem algébrica* desses pontos.

Evidentemente, precisamos verificar que $(C_k, \partial_k)_{k \geq 0}$ satisfaz a propriedade central de complexos de cadeias.

Teorema 2.38. *O complexo (C_*, ∂_*) é de fato um complexo de cadeias, isto é, $\partial^2 = 0$.*

Demonstração. Veja por exemplo [5, Section 3.3]. □

Definimos a *homologia de Morse* da dupla (f, ξ) como a homologia do complexo de cadeias:

$$\cdots \rightarrow C_{k+1} \xrightarrow{\delta_{k+1}} C_k \xrightarrow{\delta_k} C_{k-1} \rightarrow \cdots$$

Os grupos de homologia deste complexo são dados por $H_k \doteq \ker \partial_k / \partial_{k+1}(C_{k+1})$.

O seguinte teorema mostra que a homologia deste complexo é, de fato, independente da escolha da dupla (f, ξ) .

Teorema 2.39. *Sejam $f, g: W \rightarrow \mathbb{R}$ e ξ, ζ campos tais que (f, ξ) e (g, ζ) são duplas de Morse-Smale. Então existe um morfismo de complexos*

$$\Phi_*: (C_*(f), \partial) \rightarrow (C_*(g), \partial)$$

que induz um isomorfismo nas homologias.

Demonstração. Veja por exemplo [5, Section 3.5] □

2.8.2. Homologia dos Discos a Esquerda. Dado um cobordismo representado pela tripla (W, V, V') , seja f uma função de Morse auto-indexada. Defina $W_k \doteq f^{-1}[-\frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}]$ para $k \in \{-1, 0, 1, \dots, n\}$.

Defina o \mathbb{Z} -módulo livre

$$C_\lambda = H_\lambda(W_\lambda, W_{\lambda-1}).$$

Pelo Corolário 2.26 temos que C_λ é um \mathbb{Z} -módulo livre gerado pelas classes $[D_L(q_i)]$, que formam uma base de C_λ , onde $\{q_i\}$ é o conjunto de pontos críticos de índice λ .

Vamos agora definir o operador bordo entre C_k e C_{k-1} . Para isso se lembre da sequência exata para a tripla (X, A, B) , com $B \subset A \subset X$:

$$\cdots \rightarrow H_n(A, B) \xrightarrow{i_*} H_n(X, B) \xrightarrow{\pi_*} H_n(X, A) \xrightarrow{\partial} H_n(X, B) \rightarrow \cdots$$

Em particular para $W_{\lambda-2} \subset W_{\lambda-1} \subset W_\lambda$ temos o mapa quociente

$$\partial_k: H_k(W_k, W_{k-1}) \rightarrow H_{k-1}(W_{k-1}, W_{k-2})$$

Pela definição das aplicações bordo é claro que (C_*, λ_*) é um complexo de cadeias. Logo podemos definir os grupos de homologia do complexo de cadeias $H_\lambda(C_*)$.

Observe que os dois complexos de cadeias recém definidos são bastante parecidos. De fato podemos provar que se p é um ponto crítico de índice λ , $\partial[D_L(p)] = \sum_{q_j} (S_R(q_j) * S_L(p))[D_L(q_i)]$ onde $\{q_i\}$ é o conjunto de pontos críticos de índice λ . Portanto os complexos de cadeias com a mesma dupla (f, ξ) são de fato isomorfos e determinam as mesmas homologias.

Termino a exposição com um resultado importante da Homologia de Morse.

Teorema 2.40. *A homologia de Morse é isomorfa á homologia singular. Isto é $H_*(C_*) = H_*(W, V)$, onde a homologia da esquerda é uma qualquer das definidas acima, e a da direita é a homologia singular.*

2.8.3. *Teorema de Bases.* Nesta seção estudaremos a relação de bases dos complexos de cadeia acima e as duplas de Morse-Smale definidas no cobordismo.

Teorema 2.41. *Seja (W^n, V, V') uma tripla e (f, ξ) uma dupla de Morse-Smale com f auto-indexada. Se $2 \leq \lambda \leq n - 2$ e W for conexo, então dada qualquer base de $H_\lambda(W, V)$ existe uma nova dupla de Morse-Smale (g, ζ) , com g auto-indexada e com $\text{Crit}(f) = \text{Crit}(g)$, que coincide com (f, ξ) em uma vizinhança de $V \cup V'$ tal que os discos a esquerda dos pontos críticos no nível λ , orientados de maneira oportuna, determinam a base escolhida.*

Observação 2.42. Toda nesta seção tomamos as homologias com coeficientes inteiros, porém poderíamos ter feito praticamente tudo com a homologia com coeficientes em outro anel.

2.9. **Cancelando pontos críticos de índices do medios.** Uma vez estabelecidos os resultados da seção acima, podemos demonstrar um resultado parcial que é a essência do Teorema do H-Cobordismo.

Teorema 2.43. *Suponha que (W, V, V') é uma tripla de dimensão $n \geq 6$ que admite uma função de Morse cujos pontos críticos tem índice $1 < \lambda < n - 1$. Se W, V e V' forem simplesmente conexos e $H_*(W, V) = 0$ então (W, V, V') é um cobordismo produto.*

Demonstração. Seja c o cobordismo dado pela tripla (W, V, V') ; pelo Teorema 2.31 podemos fatorar $c = c_2 c_3 \dots c_{n-2}$ de maneira que c admita uma

função de Morse, f , tal que a restrição de f para c_λ só tem um nível crítico com todos os pontos críticos de índice λ .

Conseideremos o complexo de cadeias associado a esta função de Morse:

$$(2.5) \quad \cdots \rightarrow C_{n-2} \xrightarrow{\partial_{n-2}} C_{n-3} \xrightarrow{\partial_{n-3}} \cdots \xrightarrow{\partial_{\lambda+2}} C_{\lambda+1} \xrightarrow{\partial_{\lambda+1}} C_\lambda \xrightarrow{\partial_\lambda} \cdots \xrightarrow{\partial_3} C_2 \rightarrow \cdots$$

Para $\lambda \in \{2, \dots, n-2\}$, denote com $k(\lambda)$ a dimensão do núcleo de ∂_λ ; escolhamos uma base $z_1^{\lambda+1}, \dots, z_{k(\lambda+1)}^{\lambda+1}$ do núcleo de $\partial_{\lambda+1}: C_{\lambda+1} \rightarrow C_\lambda$.

Como $H_*(W, V) = 0$ temos que a sequência (2.5) é exata, de maneira que podemos escolher $b_1^{\lambda+1}, \dots, b_{k(\lambda)}^{\lambda+1}$ tal que $\partial(b_i^{\lambda+1}) = z_i^\lambda$ para todo $i \in \{1, \dots, k_\lambda\}$, então $z_1^{\lambda+1}, \dots, z_{k(\lambda+1)}^{\lambda+1}, b_1^{\lambda+1}, \dots, b_{k(\lambda)}^{\lambda+1}$ é uma base para $C_{\lambda+1}$.

Usando o Teorema da Base 2.41 podemos encontrar uma dupla de Morse-Smale (f', ξ') tal que os pontos críticos de f' com índice de Morse igual a $\lambda + 1$ representem a base escolhida acima. Fazendo um processo análogo, obtemos o mesmo para C_λ .

Sejam p e q pontos críticos, em c_λ e $c_{\lambda+1}$ respectivamente, que correspondem a z_1^λ e $b_1^{\lambda+1}$. Mudando f' de maneira apropriada obtemos que $c_\lambda c_{\lambda+1} = c'_\lambda c_p c_q c'_{\lambda+1}$, onde c_p e c_q possuem somente um ponto crítico da f' , p e q respectivamente.

Seja V_0 for um nível regular entre $f'(p)$ e $f'(q)$. Como $\partial b_1^{\lambda+1} = z_1^\lambda$, então pela definição da aplicação bordo temos que as esferas $S_R(p)$ e $S_L(q)$ em V_0 tem número de intersecção igual a ± 1 . Pode-se provar que $c_p c_q$ é simplesmente conexo, assim como seu bordo, e portanto podemos aplicar o Segundo Teorema de Cancelamento (Teorema 2.37), obtendo que c_p e c_q é um cobordismo produto. Podemos assim modificar f' e ξ' em $c_p c_q$ para uma nova dupla (g, ζ) de maneira que g não tenha pontos críticos em $c_p c_q$.

Repetindo este processo, podemos cancelar todos os pontos críticos de f , obtendo uma função de Morse para a tripla sem pontos críticos. A conclusão segue do Teorema 2.9. \square

2.10. Cancelando pontos críticos de índices baixos. Com o teorema 2.43 temos quase o Teorema do H-Cobordismo. Só nos resta lidar com os pontos críticos de índice 0, 1, n_1 e n .

Para isso temos o seguinte teorema:

Teorema 2.44. *Seja (W^n, V_0, V_1) uma tripla com uma dupla de Morse-Smale (f, ξ) com f auto-indexada. Então valem as seguintes:*

- (Parte A) *Se $H_0(W, V_0) = 0$, então os pontos críticos de índice 0 podem ser cancelados junto com um número igual de pontos críticos de índice 1.*
- (Parte B) *Suponha que W e V_0 são simplesmente conexos e $n \geq 5$. Se f não tiver pontos críticos e índice 0, então para cada ponto crítico de índice 1 podemos inserir dois pontos críticos, um de índice 2 e um de índice 3, de maneira que os pontos críticos de índice 2 se cancelam com os pontos críticos de índice 1 (no fim das contas trocamos um ponto crítico de índice 1 por um de índice 3).*

Demonstração Parte A. Como $H_0(W, V) = 0$, então temos que o grupo de homologia com coeficientes em \mathbb{Z}_2 , $H_0(W, V; \mathbb{Z}_2) = 0$. Logo por 2.40 temos que, com a notação lá estabelecida,

$$H_1(W_1, W_0; \mathbb{Z}_2) = C_1 \xrightarrow{\partial} C_0 = H(W_0, V; \mathbb{Z}_2)$$

$C_0/\partial(C_1) = 0$. Portanto ∂ é sobrejetora. Como vimos a aplicação ∂ é um homomorfismo de módulos, representado pela matriz dos números de intersecção das esferas a direita e a esquerda módulo 2.

Assim, se houver algum ponto crítico de índice 0, C_0 é não nulo e portanto temos que existe p um ponto crítico de índice 1 e p' um ponto crítico de índice 0 tais que $S_R(p) * S_L(p') \neq 0 \pmod{2}$. Portanto $S_L \cap S_R$ terá um número ímpar de pontos.

Como p tem índice 1 então $S_L(p)$ tem dimensão zero, e portanto $S_L(p)$ é um conjunto com dois elementos. Com isso concluímos que $S_L \cap S_R$ tem exatamente um ponto, e o teorema 2.36 se aplica. \square

Demonstração da Parte B. Veja [9] \square

2.11. Conclusão da prova do teorema do H-Cobordismo. Estamos prontos para a prova do Teorema 2.7.

Prova do Teorema 2.7. Seja f uma função de Morse auto-indexada para (W, V, V') o teorema 2.44 nos permite eliminar os pontos críticos de índice

0 e 1. Se tomarmos a função $-f$ temos que os pontos críticos de índice n e $n - 1$ de f serão os pontos críticos de índice 0 e 1 de $-f$ portanto usamos, mais uma vez, o teorema 2.44 para concluir que podemos eliminar os pontos críticos de índice n e $n - 1$.

Desta maneira obtemos uma função de Morse para a tripla (W, V, V') onde todos os pontos críticos tem índice $2 \leq \lambda \leq n - 2$, portanto o teorema 2.43 se aplica. \square

Definição 2.45. Dizemos que (W, V, V') é um *h-cobordismo* se V e V' são retratos por deformação de W . Além disso dizemos que V e V' são *h-cobordantes*

É possível demonstrar que as condições (1) e (2) do Teorema do H-Cobordismo implicam que V e V' são h-cobordantes. Evidentemente se V e V' são h-cobordantes temos que vale $H_*(W, V) = 0$. Portanto poderíamos enunciar o teorema do H-Cobordismo substituindo a segunda condição por V e V' serem h-cobordantes, e por isso o nome do teorema.

Corolário 2.46. *Sejam V e V' variedades h-cobordantes fechadas de dimensão ≥ 5 , então V e V' são difeomorfas.*

Demonstração. Como V e V' são h-cobordantes existe uma tripla (W, V, V') , como V e V' são um retrato por deformação de W temos que V , V' e W são simplesmente conexas e que $H_*(W, V) = 0$ logo podemos aplicar o teorema. \square

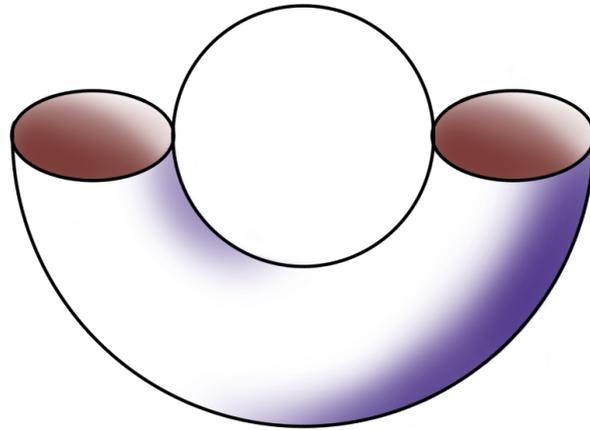


FIGURA 14. Cilindro com uma 1-célula colada

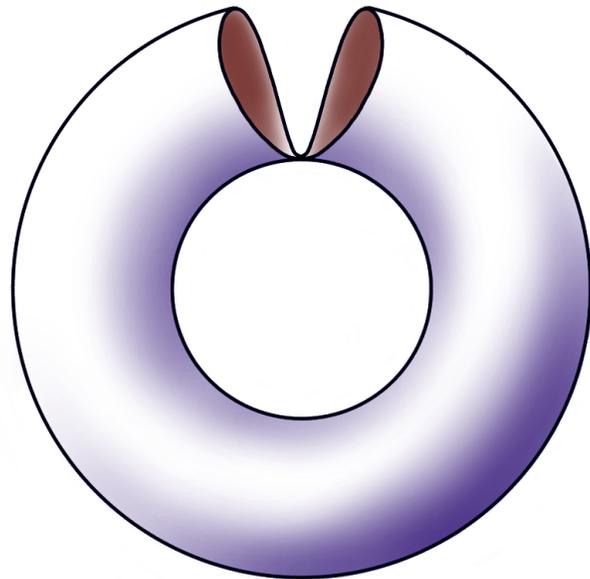


FIGURA 15. Encolhendo a 1 célula

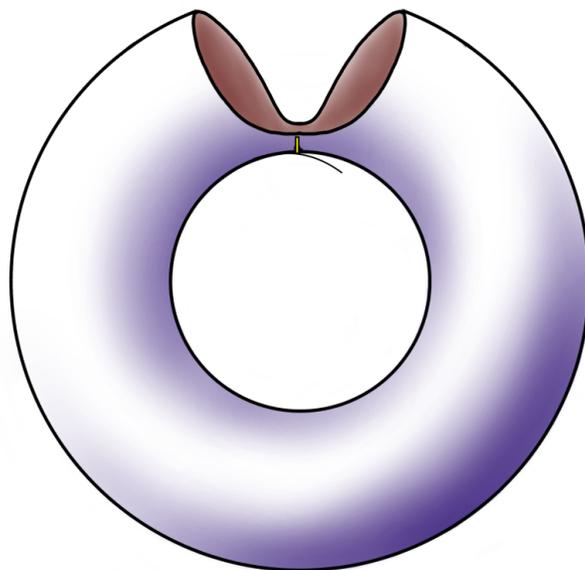
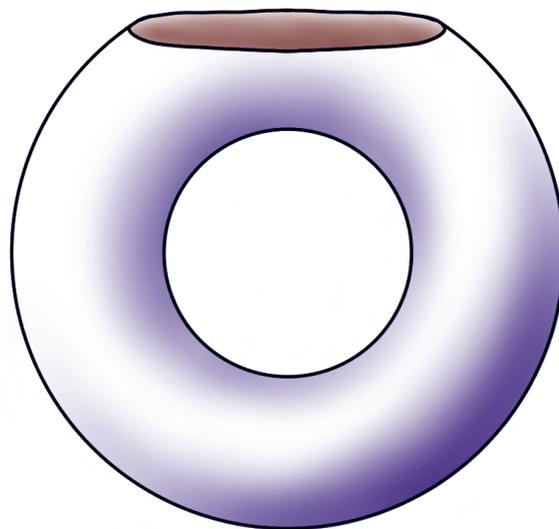


FIGURA 16.

FIGURA 17. Finalmente temos o subnível $h^{-1}\left[0, \frac{3}{4}\right]$

REFERÊNCIAS

- [1] Michèle Audin and Mihai Damian. *Morse theory and Floer homology*. Universitext. Springer, London; EDP Sciences, Les Ulis, 2014. Translated from the 2010 French original by Reinie Ern e.
- [2] Luciana Basualdo BONATTO. Bott’s periodicity theorem from the algebraic topology viewpoint. 2017.
- [3] Marius Crainic. Mastermath course differential geometry 2015/2016. 2016.
- [4] M.P. do Carmo. *Geometria Riemanniana*. Escola de geometria diferencial. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1979.
- [5] Shintaro Fushida-Hardy. Morse theory.
- [6] M. Golubitsky and V. Guillemin. *Stable Mappings and Their Singularities*. Graduate Texts in Mathematics. Springer New York, 2012.
- [7] A. Hatcher, Cambridge University Press, and Cornell University. Department of Mathematics. *Algebraic Topology*. Algebraic Topology. Cambridge University Press, 2002.
- [8] A.A. Kosinski. *Differential Manifolds*. Dover Books on Mathematics. Dover Publications, 2013.
- [9] J. Milnor. *Lectures on the H-Cobordism Theorem*. Princeton Legacy Library. Princeton University Press, 2015.
- [10] J. Milnor. *Morse Theory. (AM-51), Volume 51*. Annals of Mathematics Studies. Princeton University Press, 2016.
- [11] Richard S. Palais. The morse lemma for banach spaces. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 75(5):968–971, 09 1969.
- [12] J. Palis Jr and W. de Melo. *Introdu o aos sistemas din micos*. Projeto Euclides. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2017.
- [13] Stephen Smale. On gradient dynamical systems. *Ann. of Math. (2)*, 74:199–206, 1961.