Teoria de Morse em 15 minutos

Apresentação de Iniciação Científica

Pietro Mesquita Piccione

Departamento de Matemática
Instituto de Matemática e Estatística
Universidade de Sao Paulo

26 de novembro de 2020

Bolsa de Iniciação Científica da Fapesp, Processo 2020/04871-0

Teoria de Morse em 2 minutos

Ingredientes

- M^n variedade (compacta).
- Uma função $f\colon M \to \mathbb{R}$ diferenciável, cujos pontos críticos são não degenerados.

Resultado central da Teoria de Morse

Existe uma relação entre a topologia de M e os pontos críticos de f e seus índices.

Topologia: Complexos celulares, homologia, etc.

Dinâmica: Fluxo do gradiente de f.

Esquema geral da Teoria de Morse

- **Pontos críticos de uma função**
  - Pontos críticos. Funções de Morse
  - Índice de Morse.
  - Lema de Morse.
- **Complexos CW**
  - Células
  - Estrutura celular
  - Relação entre estrutura celular e homologia.
- **Variedades compactas**
  - Métricas Riemannianas
  - Fluxo do campo gradiente
  - Dinâmica dos subníveis,
  - Estrutura celular associada a uma função de Morse

Pontos críticos de uma função

Definição

Dizemos que $p \in M$ é um *ponto crítico de f* se:

$$\mathrm{d}f_p = 0$$

Dizemos que p é *não degenerado* se a forma bilinear

$$\boxed{\mathrm{d}^2 f_p \colon T_pM \times T_pM \longrightarrow \mathbb{R}}$$

é não degenerada.

O *índice* de p como ponto crítico da f é o número de autovalores negativos de $\mathrm{d}^2 f_p$.

Se f não tem pontos críticos degenerados, dizemos que f é uma *função de Morse*.

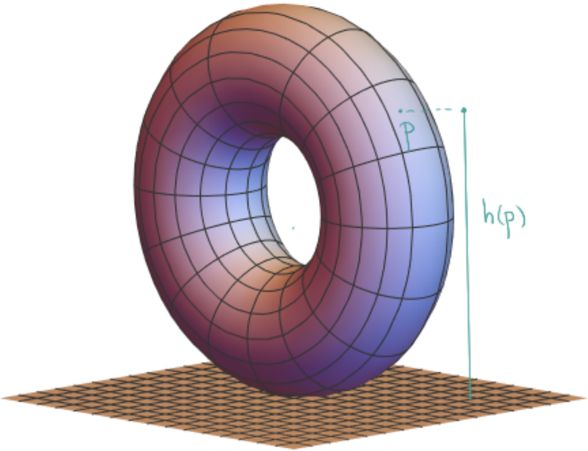
Lema de Morse

Se p ponto crítico não degenerado de f, com índice λ, então localmente f se escreve como:

$$f(x) = f(p) - x_1^2 - \cdots - x_\lambda^2 + x_{\lambda+1}^2 + \cdots + x_n^2$$

Exemplo

O clássico exemplo de função de Morse é o a função altura no toro:



$D^n \subset \mathbb{R}^n$ disco fechado

Células

Se $h\colon D^n \to X$ é contínua, e $h\big|_{\mathring{D}^n} : \mathring{D}^n \to h(\mathring{D}^n)$ é um homeomorfismo. $\Longrightarrow$ $\boxed{h(D^n) \text{ é uma } n\text{-célula em } X}$

Exemplos:

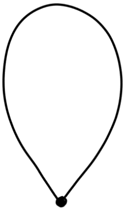


Figura: 1-célula

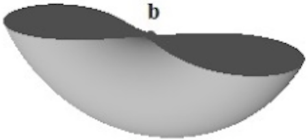


Figura: 2-célula

Complexos CW – 2

Uma estrutura celular de um espaço X é uma forma de descrever X usando células.

Definição

Uma decomposição celular de X é uma sequência:

$$X_1 \subset X_2 \subset \cdots \subset X_n \subset \cdots \subset X$$

Onde

- X_1 é um conjunto *discreto* de pontos
- X_k é formado por $k+1$-células.
- $\bigcup X_n = X$
- $+$ condição topológica.

Um complexo CW é um espaço X com uma decomposição celular.

Figura: X_1

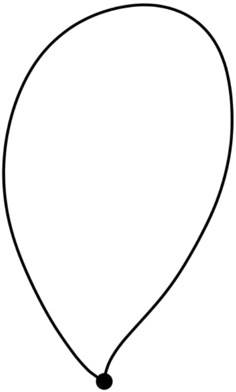


Figura: X_2

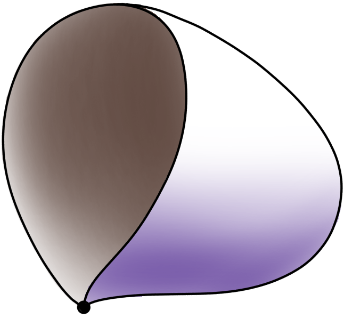


Figura: X_2 com uma 2-célula

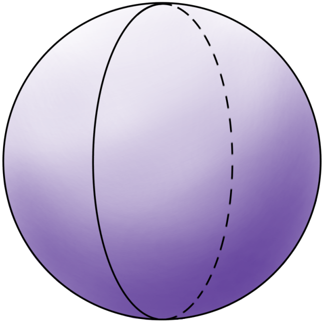


Figura: $X_3 = X$

Dizemos que uma escolha suave, de um produto interno nos espaços tangentes a M é uma *métrica riemanniana* em M

Uma variedade riemanniana é M com a escolha de uma métrica g.

Definição

Denotamos por $\nabla f_p \in T_pM$ o vetor definido pela relação

$$g_p(X, \nabla f_p) = X(f), \ \forall X \in T_pM$$

Diremos que ∇f_p é o *gradiente de f* em relação a g.

Fluxo do gradiente

Notação: $M^a = f^{-1}\big((-\infty, a]\big)$ subnível fechado da f
Note: $a < b \implies M^a \subset M^b$.

Lembre:

- Um campo de vetores V tem associado um grupo de difeomorfismos a 1-parâmetro, $(\varphi_t)_{t\in\mathbb{R}}$.
- φ é dado pelo fluxo do campo, ou seja,

$$\frac{\partial}{\partial t}\varphi_t(x) = V_{\varphi_t(x)}$$

A prova do resultado abaixo usa o fluxo de $-\nabla f$

Proposição

Se $f^{-1}[a, b]$ não contém pontos críticos, então M^a é difeomorfo a M^b.

Além disso M^a é um retrato por deformação de M^b.

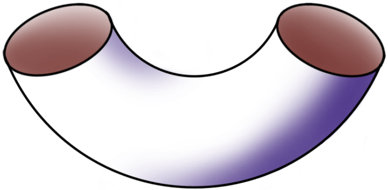


Figura: M^a

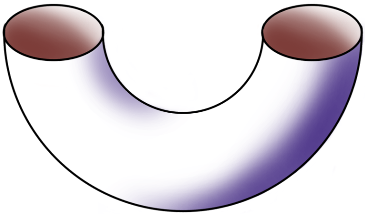


Figura: $\sim M^b$

Estrutura celular associada a uma função de Morse

Seja p um ponto crítico não degenerado de índice λ, defina $c \doteq f(p)$.

Proposição

Se $f^{-1}[c-\varepsilon, c+\varepsilon]$ não contém pontos críticos além de p, então $M^{c+\varepsilon}$ tem o tipo de homotopia de $M^{c-\varepsilon}$ com uma λ-célula colada.

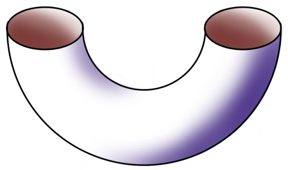


Figura: $M^{c-\varepsilon}$

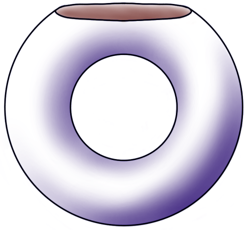


Figura: $M^{c+\varepsilon}$

Estrutura celular associada a uma função de Morse

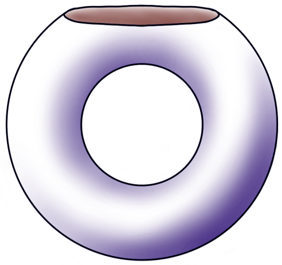


Figura: $M^{c+\varepsilon}$

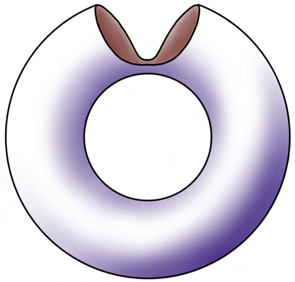


Figura: $\sim M^{c+\varepsilon}$

Estrutura celular associada a uma função de Morse

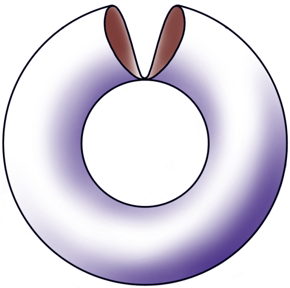


Figura: $\sim M^{c+\varepsilon}$

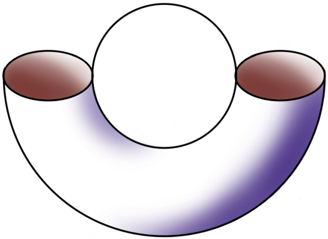


Figura: $\sim M^{c-\varepsilon} \cup e_1$

Com os dois resultados acima concluímos:

Teorema

Se f é de Morse, então M tem o tipo de homotopia de um complexo CW, com uma célula de dimensão λ para cada ponto crítico com índice λ.

Como consequência do resultado acima, podem se dar estimativas sobre os *números de Betti* da variedade M estudando pontos críticos de funções definidas em M.

Ou, mudando de perspectivas, podem se dar estimativas sobre o número de pontos críticos de uma função $f\colon M \to \mathbb{R}$ em termos dos números de Betti da M.

Exemplos

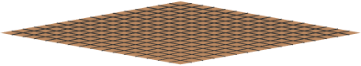


Figura: $h^{-1}((-\infty, 0])$

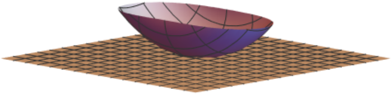


Figura: $h^{-1}((-\infty, .25])$

Exemplos

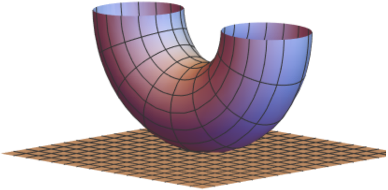


Figura: $h^{-1}\left((-\infty, 0.5]\right)$

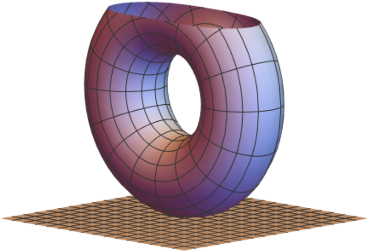


Figura: $h^{-1}\left((-\infty, 0.75]\right)$

Exemplos

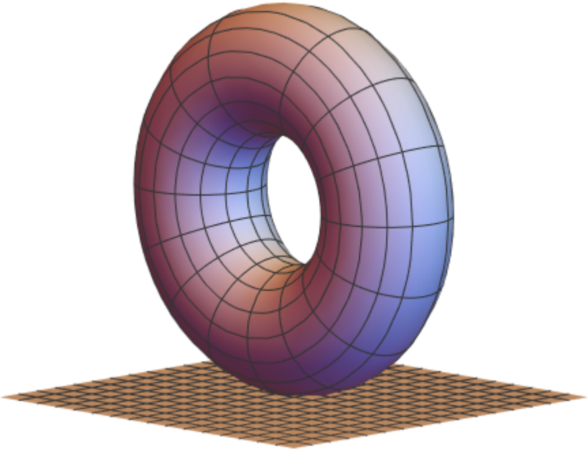


Figura: $h^{-1}((-\infty, 1])$

Aplicações da Teoria de Morse em outros contextos

- Geometria Riemanniana
  - Energia
  - Geodésicas
  - Campos de Jacobi
  - Teorema do Índice de Morse
  - Teorema Fundamental da Teoria de Morse
  - Geometria + Topologia
- estudo de multiplicidade de soluções para EDOs ou EDPs variacionais (soluções caraterizadas como pontos críticos de certos funcionais energia)

Espaço de Caminhos

$p, q \in M$ pontos fixados

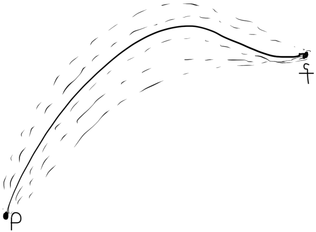
$\Omega_{p,q} \doteq \{\gamma\colon [0,1] \to M : \gamma(0) = p, \gamma(1) = q\}$

Definição

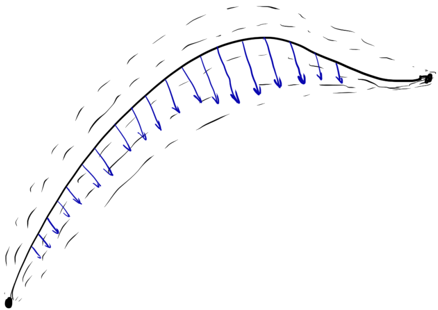
Uma variação de uma curva $\omega \in \Omega_{p,q}$ é uma função

$$\alpha\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to \Omega$$

tal que $\alpha(0) = \omega$.



Se $\tilde{\alpha}(s,t) \doteq \alpha(s)(t)$, $\frac{\partial \tilde{\alpha}}{\partial s}\big|_{s=0} \doteq W \doteq \frac{d\alpha}{ds}\big|_{s=0}$ é o campo variacional ao longo de ω associado à variação α.



$$\boxed{T_\omega \Omega_{p,q} = \{\text{campos variacionais ao longo de } \omega\}}$$

Energia e Geodésicas

Definição

Dizemos que a função $E\colon \Omega_{p,q} \to \mathbb{R}$ tal que

$$E(\gamma) = \int_0^1 \|\gamma'(t)\|^2 dt$$

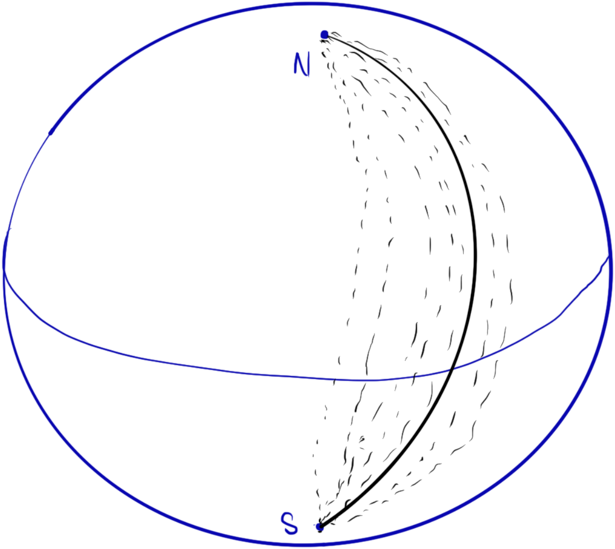
é o funcional energia

Definição

Dizemos que $\gamma \in \Omega_{p,q}$ é uma *geodésica* de p a q se for um ponto crítico de $E\colon \Omega \to \mathbb{R}$ no seguinte sentido:
Para qualquer variação α de γ temos que

$$\frac{d}{ds} E(\alpha(s))\Big|_{s=0} = 0$$

Variação por Geodésicas



Campos de Jacobi

Definição

Um campo de vetores, $J(t)$, ao longo de uma geodésica, $\gamma(t)$, é um campo de Jacobi se existe α variação de γ tal que:

- $J = \frac{d\alpha}{ds}\big|_{s=0}$.
- $\alpha(s)$ é uma geodésica para todo s.

Além disso dizemos que p e q são conjugados por γ se existir J de Jacobi não nulo tal que $J(0) = 0$ e $J(1) = 0$.

A multiplicidade de p e q como pontos conjugados é a dimensão do espaço dos campos de Jacobi que se anulam nos extremos.

Exemplo

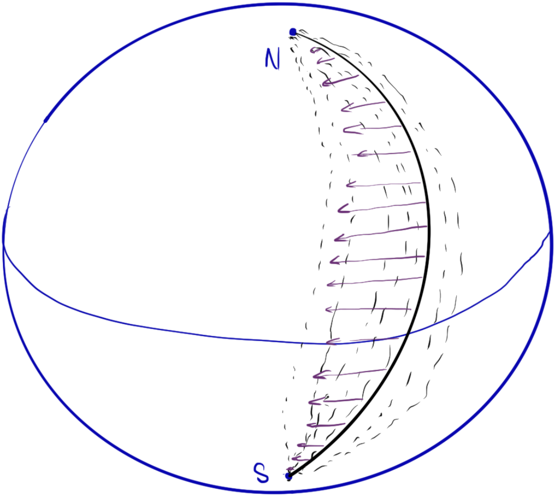


Figura: Campo de Jacobi

Índice de Morse

Podemos definir a Hessiana (derivada segunda) $\mathrm{d}^2 E(\gamma)$ de E em uma geodésica γ.

$\mathrm{d}^2 E(\gamma)$ é uma forma bilinear simétrica definida no espaço de campos variacionais ao longo de γ, cuja expressão é dada por uma integral que envolve a derivada covariante dos campos e um termo de curvatura.

Assim podemos falar do índice de E em uma geodésica γ.

Teorema do Índice de Morse

O índice de γ é igual ao $\#$ de pontos, $\gamma(t)$, com $t \in (0, 1)$, tal que $\gamma(t)$ é conjugado com p(contado com a multiplicidade).

Em particular, se uma geodésica não possui pontos conjugados, seu índice é nulo, i.e., ela é um mínimo local do funcional energia.

Se M tem a propriedade que todo conjunto fechado e limitado é compacto dizemos que M é completa.

Podemos provar que existe um subconjunto de $\Omega_{p,q}$, que é de fato uma variedade, que tem o mesmo tipo de homotopia de $\Omega_{p,q}$.
E assim concluímos que:

Teorema Fundamental da Teoria de Morse

Se $p, q \in M$ pontos não conjugados por qualquer geodésica, então $\Omega_{p,q}$ tem o tipo de homotopia de um complexo-CW com uma λ-célula para cada geodésica com índice λ em Ω.

O Teorema Fundamental da Teoria de Morse nos da uma conexão entre Geometria e Topologia da seguinte forma:

- A geometria, em particular a curvatura de uma variedade, nos dá informações sobre as geodésicas.
- O teorema dá uma conexão entre as geodésicas e o espaço de caminhos da variedade.
- O espaços de caminhos de uma variedade nos dá informações sobre a topologia da variedade.

Um exemplo de resultados que pode ser obtido com esta técnica:

Teorema de Cartan

Se M é completa, simplesmente conexa com curvatura seccional $\leqslant 0$, então M é difeomorfa a $\mathbb{R}^n$.

Muito obrigado!

Observação: Em geral um espaço X pode admitir admite mais de uma decomposição celular.

Dada uma decomposição celular de X, se c_k for o $\#$ de k-células e β_k é o k-ésimo número de Betti então valem as seguintes relações

$$\begin{aligned}
\beta_0 &\leqslant c_0 \\
\beta_1 - \beta_0 &\leqslant c_1 - c_0 \\
\beta_2 - \beta_1 + \beta_0 &\leqslant c_2 - c_1 - c_0 \\
\beta_3 - \beta_2 + \beta_1 - \beta_0 &\leqslant c_3 - c_2 + c_1 - c_0 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Em particular, somando duas desigualdades consecutivas:

$$\boxed{\beta_k \leqslant c_k, \quad \forall\, k \geqslant 0.}$$