LAPLACIANO EM VARIEDADES RIEMANNIANAS

PIETRO MESQUITA PICCIONE

RESUMO. Este é o trabalho para o curso de Geometria Riemanniana sobre o Laplaciano em variedades riemannianas. Demonstrarei duas equações de Bochner e suas aplicações, dando conexões entre Geometria, Topologia e Análise.

SUMÁRIO

Data. Julho de 2021.

INTRODUÇÃO

Os assuntos que acredito que sejam mais interessantes na matemática são aqueles que relacionam áreas e utilizam ideias diferentes. Acredito que este tipo de abordagem está no cerne do estudo da Geometria.

Neste trabalho estudei resultados básicos sobre um tópico que relaciona a Geometria, a Topologia e teoria de Equações Diferenciais em uma Variedade.

1. DEFINIÇÕES BÁSICAS

Neste texto (M, g) (ou mais concisamente M) denotará uma variedade riemanniana orientada, conexa e compacta. $\Omega^k(M) = \Lambda^k T^*M$ denotará o espaço das k-formas diferenciais em M, e

$$d^k \colon \Omega^k(M) \longrightarrow \Omega^{k+1}(M)$$

a derivada exterior de formas diferenciais.

Observação 1.1. Observamos que, para todo $p \in M$, g_p induz um produto interno em T_p^*M. De fato, basta observar que a métrica g_p pode ser vista como um isomorfismo linear

$$\begin{aligned} \flat \colon T_pM &\to T_p^*M \\ v &\mapsto g_p(v, \cdot) \doteq v^\flat \end{aligned}$$

e podemos definir em T_pM^* o produto escalar dado pelo push-forward $\flat_*(g_p)$. Com um pequeno abuso de notação, denotaremos com o mesmo símbolo g_p este produto escalar.

A aplicação inversa de $\flat$ será denotada por $\sharp$.

Observação 1.2. Além do produto interno em T_p^*M podemos induzir um produto interno em todos os espaços $\Lambda^k T_p^*M$. De fato, podemos definir

$$g(\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_k, \alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_k) \doteq \det\big(g(\omega_i, \alpha_j)\big),$$

e estender por bilinearidade ao espaço $\Lambda^k T_p^*M$. Não é difícil mostrar que este produto escalar está bem definido. Se $\theta_1, \ldots, \theta_n \in T^*M$ é uma família ortonormal, então pondo $I = \{i_1 < \cdots < i_k\}$, $J = \{j_1 < \cdots < j_{n-k}\}$

temos que

$$g(\theta_{i_1} \wedge \dots \theta_{i_k}, \theta_{j_1} \wedge \dots \wedge \theta_{j_k}) = \delta_I^J \tag{1}$$

Vamos definir um operador importante entre Ω^k e Ω^{n-k}: a *estrela de Hodge*.

Para isso, tome $\omega \in \Omega^k(M)$ e defina o funcional linear

$$\varphi_\omega \colon \Lambda_p^{n-k} T^* M \longrightarrow \mathbb{R}$$

tal que $\varphi_\omega(\alpha) = g(\omega \wedge \alpha, d\,\mathrm{vol})$. Pelo Teorema de Representação de Riesz temos que existe um único elemento denotado por $*\omega$ em $\Lambda_p^{n-k} T^* M$ tal que

$$g(\omega \wedge \alpha, d\,\mathrm{vol}) = \varphi_\omega(\alpha) = g(\alpha, *\omega)$$

.

Observe que a função $\omega \mapsto *\omega$ é linear de $\Lambda_p^k T^* M$ para $\Lambda_p^{n-k} T^* M$. Portanto, isto define uma aplicação $* \colon \omega \mapsto *\omega$ de Ω^k a Ω^{n-k}que é C^∞-linear.

Definição 1.3. O operador acima

$$* \colon \Omega^k(M) \to \Omega^{n-k}(M)$$

é chamado o operador *estrela de Hodge*.

Seja $\theta_1, \dots, \theta_n \in T_p^* M$ uma base ortonormal positivamente orientada.

Lema 1.4. *A estrela de Hodge é dada por*

$$*(\theta_{i_1} \wedge \dots \wedge \theta_{i_k}) = \theta_{j_1} \wedge \dots \wedge \theta_{j_{n-k}}$$

com $\theta_{i_1} \wedge \dots \theta_{i_k} \wedge \theta_{j_1} \wedge \dots \wedge \theta_{j_{n-k}} = (d\,\mathrm{vol}_g)_p$

Demonstração. Usando (1), temos que

$$\begin{aligned}
(\theta_{i_1} \wedge \dots \wedge \theta_{i_k}) &= \sum_L g((\theta_{i_1} \wedge \dots \wedge \theta_{i_k}), \theta_{l_1} \wedge \dots \theta_{l_{n-k}}) \theta_{l_1} \wedge \dots \wedge \theta_{l_{n-k}} \\
&= \sum_L g(\theta_{i_1} \wedge \dots \wedge \theta_{i_k} \wedge \theta_{l_1} \wedge \dots \wedge \theta_{l_{n-k}}, d\,\mathrm{vol}) \theta_{l_1} \wedge \dots \wedge \theta_{l_{n-k}} \\
&= g(\theta_{i_1} \wedge \dots \wedge \theta_{i_k} \wedge \theta_{m_1} \wedge \dots \wedge \theta_{m_{n-k}}, d\,\mathrm{vol}) \theta_{m_1} \wedge \dots \wedge \theta_{m_{n-k}} \\
&= g(\mathrm{sgn}(\sigma) d\,\mathrm{vol}, d\,\mathrm{vol}) \theta_{m_1} \wedge \dots \wedge \theta_{m_{n-k}} \\
&= \mathrm{sgn}(\sigma) \theta_{m_1} \wedge \dots \wedge \theta_{m_{n-k}}
\end{aligned}$$

$$= \theta_{j_1} \wedge \cdots \wedge \theta_{j_{n-k}}$$

Onde L varia entre os $n-k$-multi-índices ordenados, $\{m_1, \ldots, m_{n-k}\}$ obtido ordenando o conjunto de índices $\{j_1, \ldots, j_{n-k}\}$, e onde σ é a permutação associada a esta mudança de ordem. $\square$

Usando o lema acima, é uma computação simples mostrar que $** = (-1)^{k(n-k)}\mathrm{Id}$

Corolário 1.5. $g(\omega, \alpha) d\,\mathrm{vol} = \omega \wedge *\alpha$

Demonstração.

$$\begin{aligned} g(\omega, \alpha) =& (-1)^{k(n-k)} g(\omega, **\alpha) \\ =& (-1)^{k(n-k)} g(*\alpha \wedge \omega, d\,\mathrm{vol}) \\ =& g(\omega \wedge *\alpha, d\,\mathrm{vol}) \\ \implies& g(\omega, \alpha) d\,\mathrm{vol} = \omega \wedge *\alpha \end{aligned}$$ $\square$

Como vimos acima, a métrica de M induz um produto interno em $\Lambda^k T_p^* M$ para todo $p \in M$. Além disso, podemos definir um produto interno global em $\Omega_k(M)$ utilizando a integração em M. Se $\omega, \alpha \in \Omega^k(M)$ definimos

$$\langle \omega, \alpha \rangle \doteq \int_M g(\omega, \alpha) d\,\mathrm{vol} = \int_M \omega \wedge *\alpha$$

Dizemos que $\langle -, - \rangle$ é o *produto interno de Hodge*, e denotaremos por $\|-\|$ a norma associada.

Assim temos que se $\omega \in \Omega^k$ e $\eta \in \Omega^{k+1}$, então

$$\begin{aligned} \langle d\omega, \eta \rangle &= \int_M d\omega \wedge *\eta \\ &= \int_M d(\omega \wedge *\eta) - \int_M (-1)^k \omega \wedge d(*\eta) \\ &= 0 + (-1)^{k+1} \int_M \omega \wedge d(*\eta) \\ &= (-1)^{k+1} (-1)^{k(n-k)} \int_M \omega \wedge * * d(*\eta) \\ &= (-1)^{nk+1} \int_M \omega \wedge *(*d(*\eta)) \end{aligned}$$

$$= (-1)^{nk+1}\langle\omega, *d(*\eta)\rangle$$

Definição 1.6. Denotamos por $\delta = (\delta_k)$ a família de aplicações:

$$\delta^{k+1}\colon \Omega^{k+1}(M) \to \Omega^k(M)$$

definida por $\delta(\omega) = (-1)^{nk+1} * (d(*\omega))$

Vamos calcular δ^1 em coordenadas locais.

Sejam U um aberto coordenado, $\omega \in \Omega^1(M)$ e $f \in C^\infty(M)$ com $\operatorname{supp} f \subset U$, vimos acima que

$$\langle\delta\omega, f\rangle = \langle\omega, df\rangle \tag{2}$$

logo

$$\begin{aligned}
\langle\delta\omega, f\rangle &= \int_U g(\omega_i\, dx^i, \frac{\partial f}{\partial x^j} dx^j) d\operatorname{vol} \\
&= \int_U g^{ij}\omega_i \frac{\partial f}{\partial x^j} d\operatorname{vol} \\
&= \int_U g^{ij}\omega_i \frac{\partial f}{\partial x^j} \sqrt{|\det g|} dx^1 \ldots dx^n \\
&= -\int_U f\, \partial_j\big(g^{ij}\omega_i\sqrt{|\det g|}\big) dx^1 \ldots dx^n \\
&= \int_U f\, \frac{-1}{\sqrt{|\det g|}} \partial_j\big(g^{ij}\omega_i\sqrt{|\det g|}\big) d\operatorname{vol} \\
&= \int_M f\, \frac{-1}{\sqrt{|\det g|}} \partial_j\big(g^{ij}\omega_i\sqrt{|\det g|}\big) d\operatorname{vol} \\
&= \langle \frac{-1}{\sqrt{|\det g|}} \partial_j\big(g^{ij}\omega_i\sqrt{|\det g|}\big), f\rangle
\end{aligned} \tag{3}$$

A equação acima vale para todo f com suporte em U, disso segue que

$$\delta^1(\omega) = \frac{-1}{\sqrt{|\det g|}} \partial_j\big(g^{ij}\omega_i\sqrt{|\det g|}\big)$$

em U.

Definição 1.7. O *Laplaciano* em k-formas é o operador

$$\Delta\colon \Omega^k(M) \longrightarrow \Omega^k(M)$$

dado pela fórmula

$$\Delta \doteq d^{k-1}\delta^k + \delta^{k+1}d^k$$

Em particular, pondo $k = 0$, temos que o Laplaciano de funções é dado pela fórmula

$$\Delta = \delta d \tag{4}$$

Em coordenadas locais temos que se $f \in C^\infty$

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$$

e assim

$$\Delta f = \delta(df) = \frac{-1}{\sqrt{|\det g|}} \partial_j \big(g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^i} \sqrt{|\det g|} \big)$$

Concluímos então que em um ponto p, encontramos coordenadas tais que $\Delta f(p) = -\sum \frac{\partial^2 f}{\partial (x^i)^2}(p)$, como se esperaria.

Observação 1.8. É uma computação simples mostrar que Δ comuta com a estrela de Hodge, ou seja, que:

$$\Delta^{n-k} * = * \Delta^k$$

Definição 1.9. Dizemos que uma forma diferencial ω é *harmônica* se

$$\Delta \omega = 0$$

Tendo definido o Laplaciano, podemos considera-lo um operador entre espaços vetoriais de formas diferenciais, e estudar seu espectro.

Como aplicação do Teorema Espectral para operadores compactos e autoadjuntos[1] podemos provar o seguinte teorema:

Teorema 1.10 (Teorema de Hodge para Formas)**.** *Seja (M, g) uma variedade riemanniana compacta conexa orientada. Existe uma base ortonormal de $L^2 \Lambda^k T^* M$ de autoformas do Laplaciano em k-formas. Todos os*

[1] O Laplaciano não é um operador compacto, e a priori também não está definido num espaço de Hilbert, porém podemos provar que Δ^{-1} (está bem definida em espaços de Sobolev!) é compacto e autoadjunto, e o resultado segue

autovalores são não negativos. Todo autovalor tem multiplicidade finita e os autovalores acumulam somente no infinito.

Com resultados da Teoria de Regularidade é possível provar que toda autoforma é de fato C^∞, e portanto as autoformas são elementos de $\Omega^k(M)$.

Neste trabalho trataremos duas abordagens diferentes do Laplaciano em Geometria, uma no sentido do estudo do Espectro do Laplaciano e suas relações com a geometria da variedade, a dita Geometria Espectral, e a outra no sentido da Teoria de Hodge, relacionando o Laplaciano com invariantes topológicos da variedade, como os grupos de Cohomologia.

2. ALGUMAS EQUAÇÕES ENVOLVENDO O LAPLACIANO

Antes de prosseguir com algumas formulas para o Laplaciano, vou fazer uma breve discussão do Laplaciano para funções.

Se $f \in C^\infty$, então definimos a *hessiana* de f como o tensor $(0,2)$:

$$\operatorname{Hess} f(X,Y) \doteq (\nabla_X df)(Y) = X(Y(f)) - \nabla_X Y(f) \tag{5}$$

Dizemos que a função $X \mapsto \operatorname{Hess} f(X,-) \in \Omega^1(M)$ é o *operador Hessiana*, também denotado por $\operatorname{Hess} f$

Podemos definir $\Delta^B f \doteq -\operatorname{tr}(\operatorname{Hess} f)$. Observe que, exatamente como o Δ, Δ^B é um operador diferencial de segunda ordem, e além disso, temos que em $\mathbb{R}^n$ coincide com o Laplaciano usual.

Vamos mostrar que, como em $\mathbb{R}^n$, em uma variedade riemanniana qualquer $\Delta^B = \Delta^0$.

De fato, em um aberto coordenado U temos:[2]

$$\begin{aligned}
\operatorname{tr}\operatorname{Hess} f &= \operatorname{Hess} f(\partial_i, \partial_j)\, g^{ij} \\
&= \Big[\partial_i\partial_j f - \nabla_{\partial_i}\partial_j\,(f)\Big] g^{ij} \\
&= \Big[\partial_i\partial_j f - \Gamma^k_{ij}\,\partial_k f\Big] g^{ij}
\end{aligned}$$

[2]Nestas contas utilizo uma importante identidade sobre derivadas dos coeficientes das métricas, a ver, $\partial_k g_{ij} = \Gamma^l_{ki} g_{lj} + \Gamma^l_{kj} g_{il}$, obtida diretamente utilizando que a conexão é compatível com a métrica.
Além disso, como $g_{ij}g^{jk} = \delta_{i,k}$ temos que

$$\partial_l(g_{ij}g^{jk}) = 0 \implies \partial_l g^{jk} = -g^{ji}\partial_l(g_{im})g^{mk}$$

$$
\begin{aligned}
&= g^{ij}\partial_i\partial_j f - g^{ij}\Gamma^k_{ij}\,\partial_k f\\
&= g^{ij}\partial_i\partial_j f - g^{ij}\Gamma^k_{ij}\,\partial_k f + (-\Gamma^i_{mi}\,g^{km}\,\partial_k f + \Gamma^i_{mi}\,g^{km}\,\partial_k f)\\
&= g^{ij}\partial_i\partial_j f + (-g^{ij}\Gamma^k_{ij}\,\partial_k f - \Gamma^i_{mi}\,g^{km}\,\partial_k f) + \Gamma^i_{mi}\,g^{km}\,\partial_k f\\
&= g^{ij}\partial_i\partial_j f - g^{km}(g_{mr}\Gamma^r_{ij} + \Gamma^r_{mi}\,g_{rj})g^{ji}\,\partial_k f + \Gamma^i_{mi}\,g^{km}\,\partial_k f\\
&= g^{ij}\partial_i\partial_j f - g^{km}(\partial_i g_{mj})g^{ji}\,\partial_k f + \Gamma^i_{mi}\,g^{km}\,\partial_k f\\
&= g^{ij}\partial_i\partial_j f + \partial_i g^{ki}\,\partial_k f + \Gamma^i_{mi}\,g^{km}\,\partial_k f\\
&= \partial_i(g^{ij}\,\partial_j f) + \Gamma^j_{ij}g^{ij}\,\partial_j f
\end{aligned}
$$

Para simplificar as contas daqui em diante denotarei $g^{ij}\,\partial_j f$ por v^i.

Temos então que:

$$
\begin{aligned}
\operatorname{tr}\operatorname{Hess} f &= \partial_i v^i + \Gamma^j_{ij}v^i\\
&= \partial_i v^i + \frac{1}{2}g^{jk}(\Gamma^m_{ik}g_{mj} + \Gamma^m_{ij}g_{km})v^i\\
&= \partial_i v^i + \frac{1}{2}g^{jk}(\partial_i g_{kj})v^i\\
&= \partial_i v^i + \frac{1}{2}\frac{1}{\det g}\partial_i(\det g)v^i\\
&= \partial_i v^i + \frac{1}{\sqrt{\det g}}\partial_i(\sqrt{\det g})v^i\\
&= \frac{1}{\sqrt{\det g}}\partial_i\big(\sqrt{\det g}\,g^{ij}\partial_j f\big)\\
&= -\Delta f
\end{aligned}
\tag{6}
$$

Neste espirito, podemos definir $\nabla^*\colon \Gamma(T^*M\otimes T^*M)\to\Gamma(T^*M)$ como a função que numa vizinhança de $p\in M$ é dada pela identidade:

$$(\nabla^* T)(X) = -\sum_i \nabla_{E_i}T(E_i, X)$$

onde E_i é uma base ortonormal de vetores de T_pM estendidos a campos de vetores definidos numa vizinhanca de p por transporte paralelo ao longo de geodésicas radiais saindo de p, de maneira que

$$(\nabla_{E_i}E_j)_p = 0 \tag{7}$$

No resto do texto E_i's indicarão esta construção.

Observação 2.1. Não é claro a princípio do porque esta definição não depende de escolha do referencial ortonormal $(E_i)_i$ como acima. Para resolver isso vamos provar que ∇^* é a adjunta de ∇ no sentido que se $\omega \in \Omega^1$ e $\eta \in \Omega^2$ então:

$$\int_M g(\nabla\omega, \eta)\, dvol = \int_M g(\omega, \nabla^*\eta)\, dvol \tag{8}$$

Onde vejo ∇ como uma função definida em $\Gamma(T^*M)$ e tomando valores em $\Gamma(T^*M \otimes T^*M)$. Veja que demonstrando (8), provamos que ∇^* não depende da escolha dos E_i's. Diremos que ∇^* é a *adjunta de* ∇.

Para demonstrar (8) vou usar fazer uso de duas identidades que relacionam a derivada exterior e a sua adjunta (δ) com a derivada covariante ∇.

Lema 2.2. *Vale as seguintes igualdades:*

$$d\omega(X_1, \dots, X_k) = \sum_i (-1)^{i+1} (\nabla_{X_i}\omega)(X_1, \dots, X_{i-1}, X_{i+1}, \dots, X_k) \tag{9}$$

$$\delta\eta(X_2, \dots X_k) = -\sum_i (\nabla_{E_i}\eta)(E_i, X_2, \dots, X_k) \tag{10}$$

Utilizarei este lema somente para $k = 2$, logo demonstrarei só para este caso, o caso geral é parecido.

Demonstração. Por definição temos que

$$d\omega(X, Y) = X\big(\omega(Y)\big) - Y\big(\omega(X)\big) - \omega\big([X, Y]\big) \tag{11}$$

Logo temos que

$$\begin{aligned} d\omega(X, Y) &= \nabla_X\omega(Y) + \omega(\nabla_X Y) - \nabla_Y\omega(X) - \omega(\nabla_X Y) - \omega\big([X, Y]\big) \\ &= \nabla_X\omega(Y) - \nabla_Y\omega(X) + \omega\big(\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]\big) \\ &= \nabla_X\omega(Y) - \nabla_Y\omega(X) + \omega(0) \\ &= \nabla_X\omega(Y) - \nabla_Y\omega(X) \end{aligned}$$

A prova da (10) é omitida. □

Estamos prontos para provar que $\langle \nabla\omega, \eta \rangle = \langle \omega, \nabla^*\eta \rangle$.

Para fazer isso, defina a 1-forma: $P\colon X \mapsto \sum_i \omega(E_i)\eta(X,E_i)$. Pelo lema anterior temos que:

$$\delta(P) = -\sum_k (\nabla_{E_k} P)(E_k)$$

Assim, temos que em p:

$$\begin{aligned}
-\delta(P) &= \sum_{k,i} \big(\nabla_{E_k}[\omega(E_i)\eta(-,E_i)]\big)(E_k) \\
&= \sum_{k,i} E_k(\omega(E_i))\eta(E_k,E_i) + \omega(E_i)(\nabla_{E_k}\eta)(E_k,E_i) \\
&= \sum_{k,i} (\nabla_{E_k}\omega)(E_i)\eta(E_k,E_i) + \omega(\nabla_{E_k}E_i)\eta(E_k,E_i) + \sum_i \omega(E_i)\sum_k (\nabla_{E_k}\eta)(E_k,E_i) \\
&= \sum_{k,i} (\nabla_{E_k}\omega)(E_i)\eta(E_k,E_i) + \omega(0)\eta(E_k,E_i) + \sum_i \omega(E_i))(-\nabla^*\eta)(E_i) \\
&= g(\nabla\omega,\eta) - g(\omega,\nabla^*\eta)
\end{aligned}$$

Por fim, como isso vale para todo $p \in M$, concluímos que

$$0 = -\int_M \delta(P)\, dvol = \int_M g(\nabla\omega,\eta) - g(\omega,\nabla^*\eta)\, dvol$$

E assim

$$\int_M g(\nabla\omega,\eta)\, dvol = \int_M g(\omega,\nabla^*\eta)\, dvol$$

Desta maneira ∇^* não depende de coordenadas e de fato é a adjunta de ∇.

Observação 2.3. Se $\omega \in \Omega^1(M)$, então a composição $\nabla^*\nabla \doteq \Delta^B$ é dada pela fórmula:

$$\nabla^*\nabla\omega(X) = -\sum_i \nabla_{E_i}\nabla_{E_i}\omega(X)$$

Observe que $\nabla^*\nabla$ é um operador diferencial de segunda ordem, que é uma generalização do traço da hessiana para 1-formas.

Diferentemente do caso de 0-formas, ou melhor dizendo no caso das funções, $\Delta \neq \nabla^*\nabla$. Portanto a seguir vamos calcular $\Delta - \nabla^*\nabla$

Depois destas discussões vamos demonstrar duas variações de fórmulas atribuídas a Bochner, que relacionam o Laplaciano e a curvatura de Ricci.

Como a última observação veja que, em $p \in M$, Ric_p pode ser visto como um operador:

$$\begin{aligned} Ric_p &\in \hom(T_pM \otimes T_pM, \mathbb{R}) \simeq \hom(T_pM, T_p^*M \otimes \mathbb{R}) \\ &\simeq \hom(T_pM, T_p^*M) \simeq \hom(T_p^*M, T_p^*M) \end{aligned}$$

Onde por definição temos que $g(\mathrm{Ric}_p(\omega), \alpha) = \mathrm{Ric}_p(\omega^\sharp, \alpha^\sharp)$.

Proposição 2.4 (Identidade de Bochner). *Vale a seguinte igualdade:*

$$\Delta = \nabla^*\nabla + \mathrm{Ric} \tag{12}$$

Demonstração. Seja $\omega \in \Omega^1(M)$, como vimos em 2.2 temos que:

$$\begin{aligned} \delta(d\omega)(X) &= -\sum_i (\nabla_{E_i} d\omega)(E_i, X) \\ &= \sum_i -(\nabla_{E_i}\nabla_{E_i}\omega)(X) + (\nabla_{E_i}\nabla_X\omega)(E_i) \\ &= (\nabla^*\nabla\omega)(X) + \sum_i (\nabla_{E_i}\nabla_X\omega)(E_i) \end{aligned}$$

E além disso que:

$$\begin{aligned} d\delta(\omega)(X) &= d\big(-\sum_i \nabla_{E_i}\omega)(E_i)\big)\big(X\big) \\ &= -\sum_i X(\nabla_{E_i}\omega(E_i)) \\ &= -\sum_i (\nabla_X\nabla_{E_i}\omega)(E_i) + X^j\nabla_{E_i}\omega(\nabla_{E_j}E_i) \\ &= -\sum_i (\nabla_X\nabla_{E_i}\omega)(E_i) \end{aligned}$$

Juntando os dois termos temos

$$\begin{aligned} \Delta\omega(X) &= \nabla^*\nabla\omega(X) + \sum_i [(\nabla_{E_i}\nabla_X\omega)(E_i) - (\nabla_X\nabla_{E_i}\omega)(E_i)] \\ &= \nabla^*\nabla\omega(X) + \sum_i (R(E_i, X)\omega^\sharp)^\flat(E_i) + \nabla_{[X,E_i]}\omega(E_i) \\ &= \nabla^*\nabla\omega(X) + \sum_i g\big(R(E_i, X)\omega^\sharp, E_i\big) + \nabla_{[X,E_i]}\omega(E_i) \end{aligned}$$

$$= \nabla^*\nabla\omega(X) + \mathrm{Ric}(\omega)(X) + \sum_{i,j} X^j \nabla_{[E_j,E_i]}\omega(E_i)$$
$$= \nabla^*\nabla\omega(X) + \mathrm{Ric}(\omega)(X)$$

□

Agora demonstraremos uma outra fórmula também atribuída a Bochner.

Teorema 2.5 (Fórmula de Bochner-Lichnerowicz)**.** *Para toda* $f \in C^\infty$ *vale:*

$$-\frac{1}{2}\Delta(|df|^2) = |\mathrm{Hess}(f)|^2 - g(df, d(\Delta f)) + \mathrm{Ric}(df^\sharp, df^\sharp) \tag{13}$$

Demonstração. Sejam $p \in M$ e, como antes,E_i uma base ortonormal de vetores de T_pM. Podemos estender E_i a um campo de vetores definidos numa vizinhanca de p por transporte paralelo. De maneira que

$$(\nabla_{E_i}E_j)_p = 0 \tag{14}$$

Portanto, por 6, temos que em p

$$\begin{aligned}
\Delta(|df|^2) &= -\sum \nabla_{E_i}\nabla_{E_i}(|df|^2) \\
&= -2\sum \nabla_{E_i} g(\nabla_{E_i}df, df) \\
&= -2\sum g(\nabla_{E_i}\nabla_{E_i}df, df) - 2\sum g(\nabla_{E_i}df, \nabla_{E_i}df) \\
&= -2\sum g(\nabla_{E_i}\nabla_{E_i}df, df) - 2\sum g(\mathrm{Hess}\, f(E_i), \mathrm{Hess}\, f(E_i)) \\
&= -2\sum g(\nabla_{E_i}\nabla_{E_i}df, df) - 2|\mathrm{Hess}(f)|^2
\end{aligned}$$

Agora como E_i é ortonormal temos que

$$g(\nabla_{E_i}\nabla_{E_i}df, df) = \sum_j (\nabla_{E_i}\nabla_{E_i}df)(E_j)\, df(E_j)$$

Por sua vez temos que

$$\begin{aligned}
\nabla_{E_i}\nabla_{E_i}df(E_j) &= E_i(\nabla_{E_i}df(E_j)) - (\nabla_{E_i}df)(\nabla_{E_i}E_j) \\
&= E_i(\mathrm{Hess}(E_i, E_j)) - (\nabla_{E_i}df)0 \\
&= E_i(\mathrm{Hess}(E_i, E_j)) \\
&= E_i(\mathrm{Hess}(E_j, E_i))
\end{aligned} \tag{15}$$

$$
\begin{aligned}
&= E_i(\mathrm{Hess}(E_j, E_i)) - (\nabla_{E_j} df)0 \\
&= E_i(\mathrm{Hess}(E_j, E_i)) - (\nabla_{E_j} df)(\nabla_{E_j} E_i) \\
&= \nabla_{E_i} \nabla_{E_j} df(E_i)
\end{aligned}
$$

Vamos agora comutar os termos da conexão para obter um termo de curvatura:

$$
\begin{aligned}
\nabla_{E_i} \nabla_{E_j} df = \\
&= \nabla_{E_j} \nabla_{E_i} df + R(E_j, E_i) df^\sharp + \nabla_{[E_i, E_j]} df \\
&= \nabla_{E_j} \nabla_{E_i} df + R(E_j, E_i) df^\sharp
\end{aligned}
$$

Onde a última igualdade se da por (14) usando que a conexão é simétrica.

Portanto temos que:

$$
\begin{aligned}
\sum_i g(\nabla_{E_i} \nabla_{E_i} df, df) &= \sum_{i,j} [(\nabla_{E_j} \nabla_{E_i} df)(E_i)]\, df(E_j) \\
&\quad + \sum_{i,j} g(R(E_j, E_i) df^\sharp, E_i)\, df(E_j) \\
&= \sum_{i,j} [(\nabla_{E_j} \nabla_{E_i} df)(E_i)]\, df(E_j) + \sum_{i,j} g(R(df(E_j) E_j, E_i) df^\sharp, E_i) \\
&= \sum_{i,j} [(\nabla_{E_j} \nabla_{E_i} df)(E_i)]\, df(E_j) + \sum_{i} g(R(df^\sharp, E_i) df^\sharp, E_i) \\
&= \sum_{i,j} [(\nabla_{E_j} \nabla_{E_i} df)(E_i)]\, df(E_j) + \mathrm{Ric}(df^\sharp, df^\sharp)
\end{aligned}
$$

Onde a penúltima igualdade vem de que $g^{ij} = \delta_{i,j}$

Nos resta agora somente calcular o primeiro termo da última soma. Para isso basta ver que exatamente como fizemos em (15) podemos concluir que $(\nabla_{E_j} \nabla_{E_i} df)(E_i) = \nabla_{E_j}\big(\mathrm{Hess}\, f(E_i, E_i)\big)$ Por fim basta temos que:

$$
\begin{aligned}
\sum_{i,j} [(\nabla_{E_j} \nabla_{E_i} df)(E_i)]\, df(E_j) &= \sum_j \nabla_{E_j}\Big(\sum_i \mathrm{Hess}\, f(E_i, E_i)\Big)\, df(E_j) \\
&= \sum_j \nabla_{E_j}\big(-\Delta f\big)\, df(E_j) \\
&= -\sum_j d(\Delta f)(E_j)\, df(E_j)
\end{aligned}
$$

$$= -g(d(\Delta f), df)$$

Concluindo então que

$$-\frac{1}{2}\Delta(|df|^2) = |\mathrm{Hess}(f)|^2 - g(d(\Delta f), df) + \mathrm{Ric}(df^\sharp, df^\sharp)$$

□

3. Aplicações a Geometria e a Topologia

Nesta seção usaremos os identidades da seção anterior para demonstrar dois resultados que nos dão uma conexão entre Geometria Topologia e Analise em uma variedade. Além disso enunciarei um teorema importante da Teoria de Hodge.

O teorema fundamental que da partida a Teoria de Hodge diz que em toda classe de cohomologia de uma forma contém exatamente uma forma harmônica [3]. Ou seja, temos o seguinte teorema:

Teorema 3.1 (Teorema de Hodge)**.** *Seja (M, g) uma variedade compacta e orientada, então temos o isomorfismo:*

$$h\colon \ \ker \Delta^k \to H^k(M)$$
$$\omega \mapsto [\omega]$$

Onde $H^k(M)$ é o k-ésimo grupo de cohomologia de De Rham de M.

Corolário 3.2. *Se g_1 e g_2 são métricas riemannianas numa mesma variedade M temos que* $\dim\ker\Delta_{g_1} = \dim\ker\Delta_{g_2}$

Demonstração. Como os grupos de Cohomologia são invariantes topológicos, temos que os números de Betti também o são, e o resultado segue. □

Corolário 3.3. $H^k(M) \simeq H^{n-k}(M)$

Demonstração. Por 1.8 temos que a função $\omega \mapsto *(\omega)$ é um isomorfismo entre $\ker \Delta^k$ e $\ker \Delta^{n-k}$, e pelo teorema o resultado segue. □

[3]Isso faz sentido pois ω é harmônica sse $d\omega = 0$ e $\delta\omega = 0$, em particular, toda forma harmônica é fechada.

Lembre-se que $H^0(M) = \{f \in C^\infty : df = 0\}$, portanto temos que se M é conexa $H^0(M) \simeq \mathbb{R}$, pois $df = 0 \iff f$ é constante nas componentes conexas de M. Assim podemos demonstrar o seguinte resultado.

Corolário 3.4. *Sejam g_1 e g_2 duas métricas riemannianas em M, uma variedade conexa compacta e orientada, tais que $\mathrm{Vol}(M, g_1) = \mathrm{Vol}(M, g_2)$, então existe $\omega \in \Omega^{n-1}(M)$ tal que*

$$dvol_{g_1} = dvol_{g_2} + d\omega$$

Demonstração. Como vimos acima $H^n(M) \simeq H^0(M) \simeq \mathbb{R}$.

Logo a aplicação $\phi\colon H^n(M) \to \mathbb{R}$ que leva $\omega \mapsto \int_M \omega$

(1) Está bem definida pelo teorema de Stokes
(2) É sobrejetora pois $\mathrm{Vol}(M) \neq 0$, e assim $\phi(\frac{1}{\mathrm{Vol}(M)}\, dvol_{g_1}) = 1$
(3) É um isomorfismo pois $\dim H^n(M) = \dim \mathbb{R}$

Portanto o resultado segue pois temos que $\phi(dvol_{g_1}) = \phi(dvol_{g_1})$. □

Vamos agora nos voltar as aplicações das identidades de Bochner.

O primeiro teorema, bastante simpático, que provarei é uma consequência direta de 2.4.

Teorema 3.5. *Seja (M, g) uma variedade compacta e orientada com $\mathrm{Ric} > 0$, então $H^1(M) = 0$*

Demonstração. Se $H^1(M) \neq 0$, então existiria $\omega \in \ker \Delta^1$ não nulo, e portanto por 2.4 temos que:

$$\begin{aligned} 0 = \langle \Delta\omega, \omega\rangle &= \langle \nabla^*\nabla\omega, \omega\rangle + \langle \mathrm{Ric}(\omega), \omega\rangle \\ &= \langle \nabla\omega, \nabla\omega\rangle + \int_M g(\mathrm{Ric}(\omega), \omega) dvol \end{aligned}$$

Onde a última igualdade vale por 8.

O primeiro termo da última igualdade é ≥ 0 e o último é positivo pois $\mathrm{Ric}(\omega, \omega) > 0$, o que nos da um absurdo. □

Vamos provar um lema simples que nos será útil na demonstração do próximo teorema.

Lema 3.6. *Seja $\omega \in \Omega^1(M)$. Temos que*

$$\int_M \delta(\omega) dvol = 0$$

Demonstração.

$$\begin{aligned}\int_M \delta(\omega)\, dvol &= \int_M \delta(\omega) \wedge *(1) \\ &= \langle \delta(\omega), 1\rangle \\ &= \langle \omega, d(1)\rangle \\ &= \langle \omega, 0\rangle = 0\end{aligned}$$

□

Como consequência imediata temos que

Corolário 3.7. *Seja $f \in C^\infty$, então*

$$\int_M \Delta f\, dvol = 0 \quad \square$$

Estamos prontos para demonstrar um resultado que relaciona a Geometria de uma Variedade, com Equações Diferenciais nessa vareidade. Mais precisamente daremos uma relação entre a curvatura de uma variedade e os autovalores do Laplaciano nessa variedade.

Teorema 3.8 (Teorema de Lichnerowicz)**.** *Seja (M^n, g) uma variedade riemanniana compacta tal que*

$$\mathrm{Ric} \geq \rho\, g$$

para algum $\rho > 0$. Então

$$\lambda_1 \geq \frac{n}{n-1}\rho$$

onde λ_1 é primeiro autovalor positivo do Laplaciano.

Demonstração. A demonstração deste fato se baseia na Fórmula (2.5).

Se f é autofunção de Δ associada ao autovalor $\lambda > 0$ temos que por (2.5):

$$\begin{aligned}-\frac{1}{2}\Delta(|df|^2) &= |\mathrm{Hess}(f)|^2 - g(df, d(\lambda f)) + \mathrm{Ric}(df^\sharp, df^\sharp) \\ &= |\mathrm{Hess}(f)|^2 - \lambda g(df, df) + \mathrm{Ric}(df^\sharp, df^\sharp)\end{aligned}$$

Integrando obtemos que:

$$\begin{aligned} 0 &= \|\mathrm{Hess}\, f\|^2 - \lambda\|df\|^2 + \int_M \mathrm{Ric}(df^\sharp, df^\sharp)\, dvol \\ &\geq \|\mathrm{Hess}\, f\|^2 - \lambda\|df\|^2 + \rho\|df\|^2 \end{aligned}$$

Utilizando mais uma vez que f é uma autofunção do Laplaciano temos que:

$$\|\Delta f\|^2 = \langle \Delta f, \Delta f\rangle = \lambda\langle f, \delta df\rangle = \lambda\|df\|^2$$

Portanto

$$0 \geq \|\mathrm{Hess}\, f\|^2 - \|\Delta f\|^2 + \frac{\rho}{\lambda}\|\Delta f\|^2 \tag{16}$$

Tomando E_i uma base ortonormal de T_pM para algum $p \in M$ e estendendo E_i a campos de vetores em uma vizinhança de p por transporte paralelo. Temos que

$$\Delta f = -\,\mathrm{tr}\,\mathrm{Hess}\, f = -\sum_i \mathrm{Hess}\, f(E_i, E_i)$$

Então temos que

$$\begin{aligned} (\Delta f)^2 = \big(\sum_i \mathrm{Hess}\, f(E_i, E_i)\big)^2 &= \big(\sum_i 1\,\mathrm{Hess}\, f(E_i, E_i)\big)^2 \\ &\leq (\sum 1^2)(\sum_i \mathrm{Hess}\, f(E_i, E_i)^2) \\ &= n(\sum_i \mathrm{Hess}\, f(E_i, E_i)^2) \\ &\leq n\sum_{i,j} \mathrm{Hess}\, f(E_i, E_j)^2 \\ &= n|\mathrm{Hess}\, f|^2 \end{aligned}$$

E assim temos que

$$|\mathrm{Hess}\, f|^2 \geq \frac{1}{n}(\Delta f)^2$$

Obtendo finalmente que

$$\begin{aligned} 0 &\geq \|\mathrm{Hess}\, f\|^2 - \lambda\|df\|^2 + \frac{\rho}{\lambda}\|df\|^2 \\ &\geq \frac{1}{n}\|\Delta f\|^2 - \|\Delta f\|^2 + \frac{\rho}{\lambda}\|\Delta f\|^2 \\ &= \big(\tfrac{1}{n} - 1 + \tfrac{\rho}{\lambda}\big)\|\Delta f\|^2 \end{aligned}$$

De maneira que se $\lambda > 0$ então $\|\Delta f\|^2 > 0$, o que implica que $\lambda \geq \rho\frac{n}{n-1}$.

Em particular temos que:

$$\lambda_1 \geq \rho\frac{n}{n-1}$$

$\square$

O espectro do Laplaciano traz consigo muitas informações geométricas da variedade, como condições nas curvaturas e o próprio volume da variedade, portanto não é uma surpresa que calcular explicitamente espectros de variedades é um trabalho difícil. O espectro de esferas é calculado em [1].

Referências

[1] M. Berger, P. Gauduchon, and E. Mazet. *Le Spectre d'une Variete Riemannienne*. Lecture Notes in Mathematics. Springer Berlin Heidelberg, 1971.

[2] Antonio Caminha Muniz Neto. *Tópicos de Geometria Diferencial*. Coleção Fronteiras da Matemática. Sociedade Brasileria de Matemática, 1 edition, 2014.

[3] Peter Petersen. Demystifying the weitzenböck curvature operator. 2010.

[4] S. Rosenberg, R. Steven, C.M. Series, and J.W. Bruce. *The Laplacian on a Riemannian Manifold: An Introduction to Analysis on Manifolds*. EBSCO ebook academic collection. Cambridge University Press, 1997.

ÍNDICE REMISSIVO

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO